АСИНХРОННЫЙ ЭЛЕКТРОПРИВОД

Томск 2003 г.

Асинхронный электропривод:..... , Томск, 2003 г.

В пособии рассматриваются .....

Методическое пособие подготовлено .....

Составитель: ассистент Ланграф С. В.

Томский политехнический университет, 2003

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 4
1. Общие сведения 5
1.1. Выбор двигателя 7
1.2. Определение параметров АД 10
3. Система относительных единиц 14
4. Установившиеся режимы АД при частотном управлении 17
5. Преобразование координат 19
6. Моделирование динамических режимов АД 28
6.1. Потокосцепления и электродвижущие силы 28
6.2. Уравнения электрического равновесия 30
6.3. Преобразование уравнений электромагнитных контуров 32
6.4. Выражение для электромагнитного момента 37
6.5. Уравнения механического движения 38
6.6. Модель асинхронной машины 39
Модель общего вида 40
Модель в переменных $I_s - \Psi_r$ 42
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 51

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время электропривод с двигателями переменного тока и управляемыми полупроводниковыми преобразователями частоты занимает лидирующее положение среди других типов регулируемого электропривода. Интенсивному развитию этого направления способствуют значительные успехи в усовершенствовании традиционных и создании новых силовых управляемых полупроводниковых приборов и интегральных схем, развитии цифровых информационных технологий и разнообразных средств микроконтроллерного управления.

Асинхронные двигатели наиболее часто применяются в промышленности и на транспорте из-за своей простоты и надёжности. Однако эффективное управление ими представляет собой довольно сложную задачу и требует создания специальных систем управления.

1. Общие сведения

На рис. 1.1 представлен внешний вид АД с короткозамкнутым ротором.

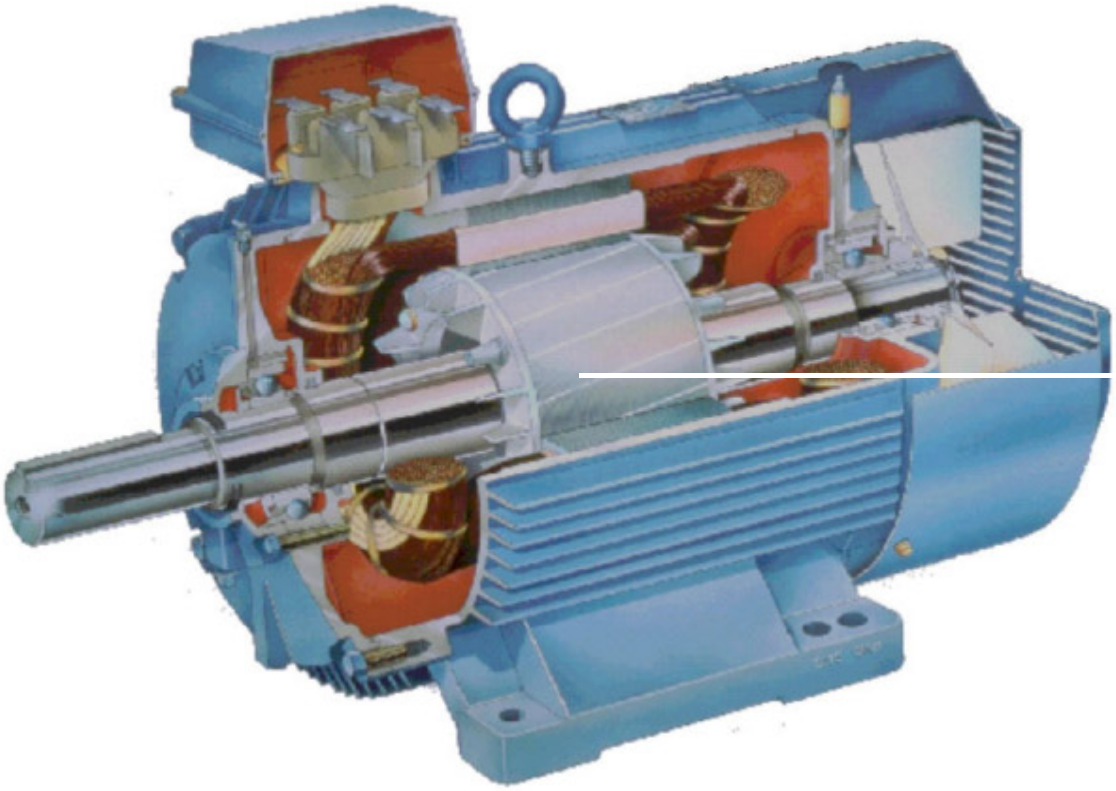

Рис. 1.1 Асинхронный двигатель

Из теории электрических машин известно, что в АД преобразование энергии происходит при несинхронном вращении ротора и магнитного поля статора. В двигательном режиме разница частот вращения ротора и поля статора в большинстве случаев невелика, и составляет лишь несколько процентов.

Для правильного понимания особенностей статических режимов преобразования энергии в асинхронном двигателе нужно установить физические причины, определяющие характер зависимости момента двигателя от скольжения. С этой целью необходимо определить зависимость, связывающую момент двигателя М, ток ротора и результирующий магнитный поток Ф.

Теоретически АД может работать при изменении скольжения $S = -\infty \div +\infty$, но не при $S = 0$, так как в этом случае $\omega = \omega_0$, проводники ротора неподвижны относительно поля статора, ЭДС и токи в стержнях равны нулю и момент отсутствует. В зависимости от практически возможных скольжений различают несколько режимов работы АД: генераторный режим при $S < 0$, двигательный при $0 < S < 1$ и торможение противовключением при $S > 1$. В генераторном режиме ротор вращается в ту же сторону, что и поле статора, но с большей частотой. В двигательном – направления вращения поля статора и ротора совпадают, но ротор вращается медленнее статора. В режиме противовключения ротор вращается, но направление его вращения противоположно направлению вращения поля статора и машина создаёт тормозной момент. Сказанное выше иллюстрируется на рис. 1.2.

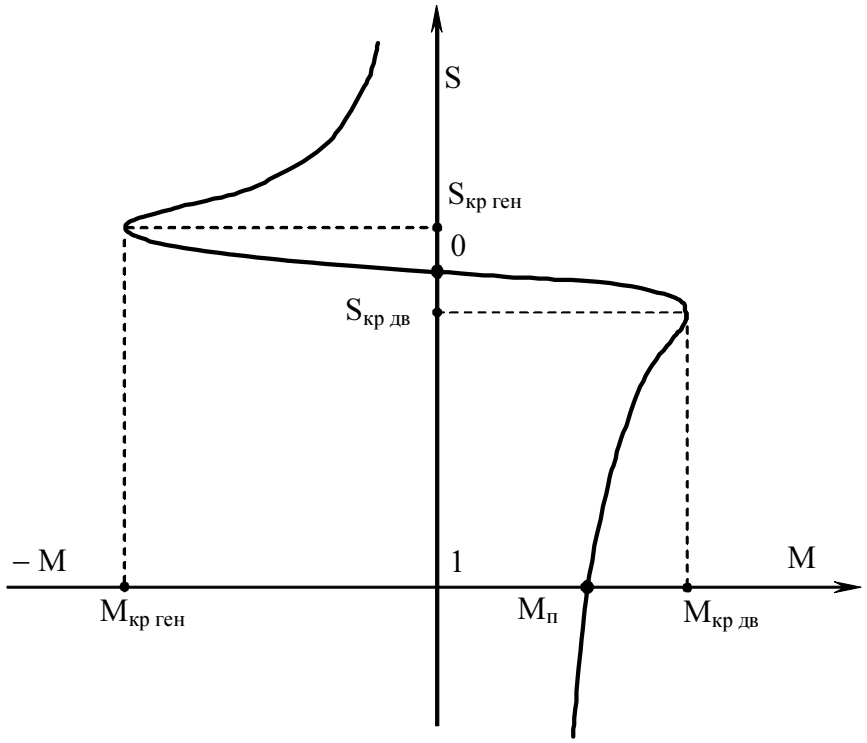

Рис. 1.2. Механическая характеристика асинхронного двигателя $M = f(S)$

1.1. Выбор двигателя

В данном разделе объясняются принципы выбора двигателя для скалярных систем управления с режимом работы S1. С определёнными допущениями можно выполнить выбор двигателя и для других систем управления.

Для правильного выбора двигателя в асинхронном приводе необходимо следовать условию

$$M_{дв} \geq M_{мех},$$

где $M_{дв}$ – момент развиваемый двигателем;

$M_{мех}$ – момент сопротивления механизма.

Следует также учитывать то, что каждый двигатель рассчитан на работу с номинальной скоростью, поэтому при выборе АД для скалярного управления необходимо принимать во внимание диапазон регулирования:

$$\omega_{мех.\min} \geq \frac{1}{5 \div 10}\omega_{дв.ном} \qquad \omega_{мех.\max} \leq 2\omega_{дв.ном}$$

где $\omega_{дв.ном}$ – скорость двигателя в номинальном режиме при номинальном напряжении и номинальной (базовой) частоте;

Ввиду того, что двигатели имеют самовентиляцию, при снижении скорости ухудшаются условия охлаждения и допустимый по нагреву момент уменьшается [5]. При увеличении скорости вверх от номинальной происходит регулирование ослаблением поля, что соответствует работе с постоянной мощностью, и уменьшением момента.

Согласно рекомендациям фирмы Siemens [5], выбор двигателя с самовентиляцией по условиям допустимого момента можно выполнить по нагрузочной характеристике, рис. 1.3.

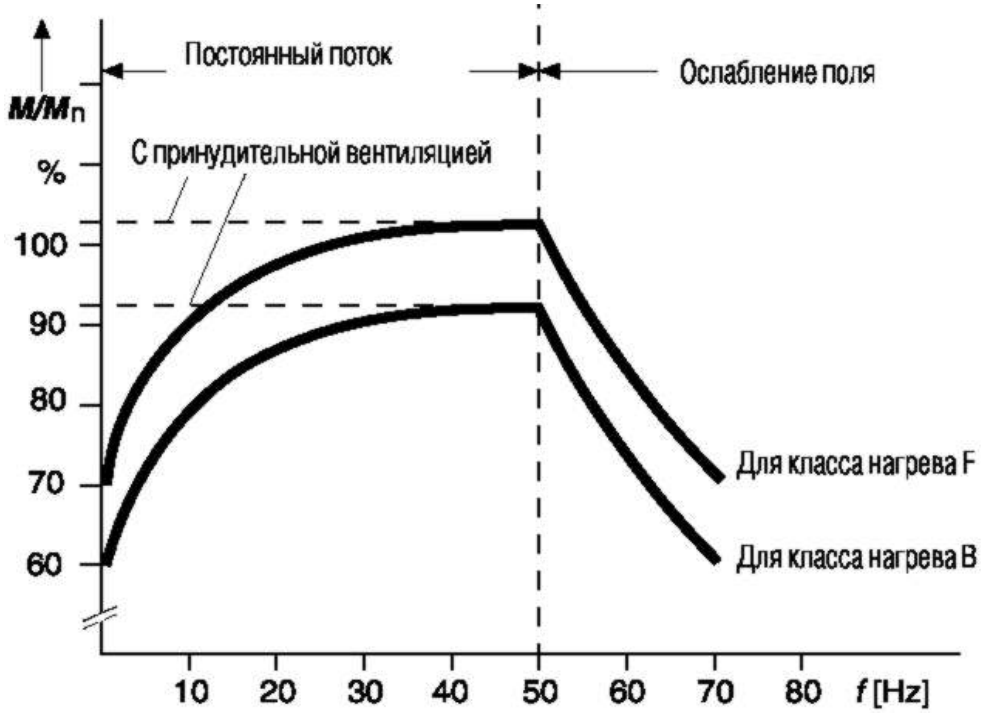

Рис. 1.3. Нагрузочная характеристика АД при частотном регулировании

На рис. 1.3. горизонтальная ось соответствует изменению частоты питания статора, а на вертикальной оси приводится максимально-допустимый момент, выраженный в относительных единицах.

На всём диапазоне регулирования необходимо чтобы момент двигателя был больше чем момент нагрузки.

В качестве примера рассмотрим выбор двигателя для электропривода токарного станка: Режим S1, $M_{мех} = 100$ Нм, $n_{max} = 2000$ об/мин, $n_{min} = 200$ об/мин.

Определяем требуемый диапазон регулирования:

$$D = \frac{n_{\max}}{n_{\min}} = \frac{2000}{200} = 10.$$

Для удовлетворительного функционирования достаточно принять равным

$$1.5 \cdot n_{дв.0} \geq n_{\max}, \text{ тогда } \quad n_{дв.0} \geq \frac{n_{\max}}{1.5} \geq \frac{2000}{1.5} \geq 1333.33 \text{ об/мин.}$$

Следовательно, при выборе двигателя его синхронная скорость должна быть не менее 1333,33 об/мин. В данном случае подходящим оказывается двигатель с двумя парами полюсов, т. е. z = 2:

$$n_{дв.0} = \frac{9.55 \cdot 2\pi f_c}{z} = \frac{9.55 \cdot 2 \cdot 3.14 \cdot 50}{2} = 1500 \text{ об/мин.}$$

Для работы двигателя с двумя парами полюсов на максимальной скорости потребуется увеличение частоты напряжения статора до уровня:

$$f_{\max} = \frac{n_{\max} \cdot f_{ном}}{n_{дв.0}} = \frac{2000 \cdot 50}{1500} = 66{,}67 \text{ Гц.}$$

Для работы двигателя с двумя парами полюсов на минимальной скорости потребуется снижение частоты напряжения статора до уровня:

$$f_{\max} = \frac{n_{\min} \cdot f_{ном}}{n_{дв.0}} = \frac{200 \cdot 50}{1500} = 6{,}67 \text{ Гц.}$$

Момент нагрузки, создаваемый шпинделем токарного станка неизменен по величине на протяжении всего диапазона регулирования, т. е. необходимо выполнение следующих условий:

$$M_{дв.\min} \geq M_{мех}, \qquad M_{дв.\max} \geq M_{мех}.$$

В соответствии с рис. 1.3, для двигателя с самовентиляцией на частоте 66,67 Гц необходимо ограничение момента на уровне $0{,}75\,M_{дв.ном}$. Следовательно, для максимальной скорости должно выполняться условие:

$$0{,}75 \cdot M_{дв.тр} \geq M_{мех}, \qquad \text{т.е} \qquad M_{дв.тр} \geq \frac{M_{мех}}{0{,}75},$$

где $M_{дв.тр}$ – требуемый момент двигателя.

При работе на частоте 6,67 Гц для двигателя с самовентиляцией необходимо ограничение момента на уровне $0{,}8\,M_{дв.ном}$. Следовательно, для минимальной скорости должно выполняться условие:

$$0{,}8 \cdot M_{дв.тр} \geq M_{мех}, \qquad \text{т.е} \qquad M_{дв.тр} \geq \frac{M_{мех}}{0{,}8}.$$

Из двух условий выбираем минимальное ограничение, т. е.

$$M_{дв.тр} \geq \frac{M_{мех}}{0{,}75} \geq \frac{100}{0.75} \geq 133.33 \text{ Нм.}$$

Известно, что между номинальными моментом и мощностью имеется следующая взаимосвязь:

$$M_{дв.ном} = 9{,}55 \cdot \frac{P_{ном}}{n_{ном}}, \qquad \text{тогда требуемая мощность АД}$$

$$P_{тр} \geq \frac{M_{дв.тр} \cdot n_{дв.0}}{9{,}55} \geq \frac{133{,}33 \cdot 1500}{9{,}55} = 20941{,}8 \text{ Вт.}$$

Из справочника предварительно выбираем двигатель с соответствующей номинальной мощностью и двумя парами полюсов. Ближайший по мощности четырехполюсной двигатель – RA180L4. Необходимо выполнить дополнительную проверку предварительно выбранного двигателя, т. к. $n_{дв.ном} < n_{дв.0}$.

$$M_{дв.ном} = 9{,}55 \cdot \frac{P_{дв.ном}}{n_{дв.ном}} = 9{,}55 \cdot \frac{22000}{1460} = 143{,}9 \text{ Нм,}$$

условие $M_{дв.ном} \geq M_{дв.тр}$ выполняется, следовательно, выбор двигателя сделан правильно.

1.2. Определение параметров АД

При создании электроприводов с двигателями переменного тока часто сталкиваются с проблемой определения параметров асинхронного двигателя, которые необходимы для проектирования и настройки системы управления электроприводом, а также для моделирования переходных процессов в асинхронном электроприводе с ПЧ.

Одним из возможных вариантов определения параметров АД является метод использования конструктивных параметров электрической машины, но он обладает существенным недостатком, который заключается в том, что разработчикам электропривода эти параметры не всегда доступны, и, кроме того, необходимо располагать соответствующими методиками расчета.

Параметры АД можно экспериментально определить из опыта короткого замыкания и холостого хода, но экспериментальные исследования возможно проводить только при наличии испытуемого электродвигателя, а также необходимо наличие достаточно сложных лабораторных установок, позволяющих исследовать АД в различных режимах.

Для большинства практических случаев приемлемыми являются методы определения параметров АД на основании его справочных данных [5]. Как правило, в справочниках и каталогах приводятся следующие технические данные: $U_Н$ – линейное напряжение, $I_{1Н}$ – ток статора, $P_{2Н}$ – полезная мощность, $\eta_Н$ – коэффициент полезного действия, $n_Н$ – номинальная частота вращения (или скольжение $S_Н$), $К_М$ – кратность максимального момента, $К_П$ и $К_Т$ – кратности пускового момента и пускового тока. Кроме того, в каталогах приводятся энергетические показатели (η, cosφ) при нагрузке АД, равной 25, 50, 75 и 100% от номинальной мощности.

Ток холостого хода можно определить по формуле, предложенной в [5]:

$$I_0 = \sqrt{\frac{I_{1чз}^2 - \left[I_{1н}\kappa_{чз} \frac{1-S_н}{1-\kappa_{чз}S_н} \right]^2}{1-\left[\kappa_{чз} \frac{1-S_н}{1-\kappa_{чз}S_н} \right]^2}},$$

где $I_{1н} = \dfrac{P_н}{\sqrt{3}\cdot U_н \cdot \cos\varphi_н \cdot \eta_н}$ – ток двигателя в номинальном режиме;

$S_н = \dfrac{n_0 - n_н}{n_0}$ – номинальное скольжение двигателя;

$I_{1чз} = \dfrac{\kappa_{чз} \cdot P_н}{\sqrt{3}\cdot U_н \cdot \cos\varphi_{чз} \cdot \eta_{чз}}$ – ток двигателя при частичной загрузке;

$\cos\varphi_{чз}$, $\eta_{чз}$ – коэффициент мощности и КПД двигателя при частичной загрузке;

$\kappa_{чз} = {P_{чз}}/{P_н}$ – коэффициент частичной загрузки двигателя.

Коэффициент мощности и КПД при частичной загрузке в технической литературе приводятся редко, а для целого ряда серий электрических машин такие данные в справочной литературе отсутствуют. Эти параметры можно определить, руководствуясь следующими соображениями:

– современные асинхронные двигатели проектируются таким образом, что наибольший КПД достигается при загрузке на 10-15% меньшей номинальной [6]. Двигатели рассчитываются так потому, что большинство из них в силу стандартной дискретной шкалы мощностей работают с некоторой недогрузкой. Поэтому КПД при номинальной нагрузке и нагрузке $p_* = 0{,}75$ практически равны между собой, т.е.

$$\eta_{\text{Н}} \approx \eta_{0{,}75}$$

– коэффициент мощности при той же нагрузке $p_* = 0{,}75$ значительно отличается от коэффициента мощности при номинальной нагрузке, причем это отличие в значительной степени зависит от мощности двигателя и для известных серий асинхронных двигателей с достаточной для практики точностью подчиняется зависимости, приведенной на рис. 2.1.

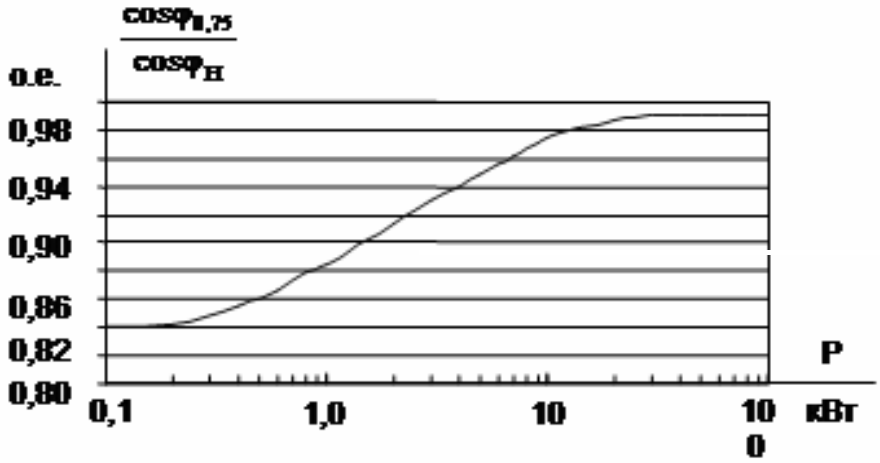

Рис. 2.1. Зависимость $\cos\varphi_{0,75} / \cos\varphi_{\text{Н}}$ от мощности асинхронного двигателя

Критическое скольжение определим в соответствии с формулой, предложенной в [5]

$$S_{кр} = S_{н} \frac{\left[K_{м} + \sqrt{K_{м}^2 - \left[1 - 2S_{н}\beta\left(K_{м} - 1\right)\right]}\right]}{1 - 2S_{н}\beta\left(K_{м} - 1\right)},$$

где β – вспомогательный коэффициент (на начальном этапе принимаем $\beta = 1$, в дальнейшем β может принимать диапазон значений от 0,6 до 2,5).

Далее по приведённым выражениям [5] необходимо определить ряд промежуточных коэффициентов:

$$C_1 = \frac{I_0}{2K_T I_{1н}} + 1; \qquad A_1 = 3U_{фн}^2 \frac{1 - S_н}{2C_1 K_м P_н}; \qquad A_0 = \frac{I_{1н}\cos\varphi_н - I_0 \cos\varphi_0}{U_{фн}};$$

$$B = \frac{1}{S_н} + \frac{1}{S_{кр}} - A_0 2\frac{A_1}{S_н}; \qquad C = \frac{1}{S_н S_{кр}} - \left(\frac{1}{S_{кр}^2} + \frac{1}{S_н^2}\right) A_0 A_1,$$

где $\cos\varphi_0 = \cos 82° = 0.139$ – коэффициент мощности АД в режиме холостого хода.

Теперь по найденным значениям проверяем величину заданного в начале расчёта коэффициента β:

$$\beta_p = \left| \frac{-B}{2} + \sqrt{\frac{B}{2} - C} \right|.$$

Если $\beta_p > \beta$, необходимо уменьшить, а если $\beta_p < \beta$, то увеличить начальное значение коэффициента β и повторить весь расчёт сначала. Как правило, за несколько итераций удаётся получить вполне удовлетворительные результаты.

Если разница между β_p и β не превышает установленной погрешности расчёта (≈ 0.001) можно переходить к непосредственному определению параметров асинхронной машины [5].

$$R_2{}' = \frac{A_1}{\left(\beta + \frac{1}{S_{кр}}\right) C_1}; \qquad R_1 = C_1 R_2{}' \beta; \qquad \gamma = \sqrt{\frac{1}{S_{кр}^2} - \beta^2};$$

$$X_н = \gamma C_1 R_2{}'; \qquad X_1 = 0.42 X_н; \qquad X_2{}' = 0.58 \frac{X_н}{C_1};$$

$$E_1 = \sqrt{\left(U_{фн}\cos\varphi_н - R_1 I_{1н}\right)^2 + \left(U_{фн}\sin\varphi_н + X_1 I_{1н}\right)^2}; \qquad X_\mu = \frac{E_1}{I_0}.$$

В листинге 2.1 приводится пример расчёта параметров асинхронного двигателя модели 6А80В6У3 на основании его справочных данных.

Листинг 2.1

Тип_двигателя 6А80В6У3

$U_ф := 220$ $P_{2н} := 550$ $\eta_н := 70.5\%$ $\cos\phi_{1н} := 0.7$ $K_м := 2.2$ $\cos\phi_{чз} := 0.58$

$S_н := 0.08$ $\kappa_{чз} := 0.75$ $f_c := 50$ $m := 3$ $K_т := 7$ $K_п := 1.8$ $\eta_{чз} := 70.5\%$ $\phi_{1н} := \operatorname{acos}(\cos\phi_{1н})$

$K_{мин} := 1.5$ $I_{1н} := \dfrac{P_{2н}}{m \cdot U_ф \cdot \eta_н \cdot \cos\phi_{1н}}$ $I_{1н} = 1.689$ $P_{2чз} := P_{2н} \cdot \kappa_{чз}$

$$I_{1чз} := \begin{cases} \dfrac{P_{2чз}}{m \cdot U_ф \cdot \eta_{чз} \cdot \cos\phi_{чз}} & \text{if } P_{2чз} > 0 \\ \text{"DATA_ERROR"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$I_0 := \sqrt{\frac{I_{1чз}^2 - \left[I_{1н} \cdot \kappa_{чз} \dfrac{(1 - S_н)}{(1 - \kappa_{чз} \cdot S_н)}\right]^2}{1 - \left[\kappa_{чз} \dfrac{(1 - S_н)}{(1 - \kappa_{чз} \cdot S_н)}\right]^2}}$$

$\phi_0 := 82\text{deg}$ $I_{1чз} = 1.528$ $I_0 = 1.317$

$C_1 := \left(\dfrac{I_0}{2 \cdot K_т \cdot I_{1н}}\right) + 1$ $A_1 := m \cdot U_ф^2 \dfrac{1 - S_н}{2 \cdot C_1 \cdot K_м \cdot P_{2н}}$

$$\beta := \begin{cases} \beta_p \leftarrow 1 \\ \beta \leftarrow 1.5 \\ \text{while } \beta \neq \beta_p \\ \quad \text{break if } |\beta - \beta_p| < 0.001 \\ \quad \beta \leftarrow \begin{cases} \beta_p - 0.1 & \text{if } \beta < \beta_p \\ \beta_p + 0.1 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \quad S_{кр} \leftarrow S_н \dfrac{\left[K_м + \sqrt{K_м^2 - \left[1 - 2 \cdot S_н \cdot \beta \cdot (K_м - 1)\right]}\right]}{\left[1 - 2 \cdot S_н \cdot \beta \cdot (K_м - 1)\right]} \\ \quad A_0 \leftarrow \dfrac{I_{1н} \cdot \cos\phi_{1н} - I_0 \cdot \cos(\phi_0)}{U_ф} \\ \quad B \leftarrow \left(\dfrac{1}{S_н}\right) + \left(\dfrac{1}{S_{кр}}\right) - A_0 \cdot 2 \dfrac{A_1}{S_н} \\ \quad C \leftarrow \left(\dfrac{1}{S_н \cdot S_{кр}}\right) - \left(\dfrac{1}{S_{кр}^2} + \dfrac{1}{S_н^2}\right) \cdot A_0 \cdot A_1 \\ \quad \beta_p \leftarrow \left|\left(\dfrac{-B}{2}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{B}{2}\right) - C}\right| \\ \quad \text{return "ERROR" if } |\beta - \beta_p| > 10 \\ \beta \end{cases}$$

$\beta = 0.948$

$S_{кр} := S_н \dfrac{\left[K_м + \sqrt{K_м^2 - \left[1 - 2 \cdot S_н \cdot \beta \cdot (K_м - 1)\right]}\right]}{\left[1 - 2 \cdot S_н \cdot \beta \cdot (K_м - 1)\right]}$

$S_{кр} = 0.411$

$A_1 := m \cdot U_ф^2 \dfrac{1 - S_н}{2 \cdot C_1 \cdot K_м \cdot P_{2н}}$

$A_0 := \dfrac{I_{1н} \cdot \cos\phi_{1н} - I_0 \cdot \cos(\phi_0)}{U_ф}$

$B := \left(\dfrac{1}{S_н}\right) + \left(\dfrac{1}{S_{кр}}\right) - A_0 \cdot 2 \cdot \dfrac{A_1}{S_н}$

$C := \left(\dfrac{1}{S_н \cdot S_{кр}}\right) - \left(\dfrac{1}{S_{кр}^2} + \dfrac{1}{S_н^2}\right) \cdot A_0 \cdot A_1$

$R'_2 := \dfrac{A_1}{\left(\beta + \dfrac{1}{S_{кр}}\right) \cdot C_1}$ $R_1 := C_1 \cdot R'_2 \cdot \beta$ $\beta = 0.948$ $\gamma := \sqrt{\left(\dfrac{1}{S_{кр}^2}\right) - \beta^2}$ $\gamma = 2.239$ $\phi_{1н} := \operatorname{acos}(\cos\phi_{1н})$ $X_н := \gamma \cdot C_1 \cdot R'_2$

$X_1 := 0.42 \cdot X_н$ $X'_2 := 0.58 \cdot \dfrac{X_н}{C_1}$ $X_1 = 14.548$ $X'_2 = 19.03$

$E_1 := \sqrt{\left(U_ф \cdot \cos\phi_{1н} - R_1 \cdot I_{1н}\right)^2 + \left(U_ф \cdot \sin(\phi_{1н}) + X_1 \cdot I_{1н}\right)^2}$ $E_1 = 222.948$ $X_μ := \dfrac{E_1}{I_0}$

$R_1 = 14.671$ $R'_2 = 14.656$ $X_1 = 14.548$ $X'_2 = 19.03$ $X_μ = 169.289$

3. Система относительных единиц

В дальнейшем все параметры и переменные состояния электропривода представляются в относительных единицах[1]. Использование относительных единиц при моделировании режимов работы электрических машин и источников их питания характеризуется наглядностью и определённым удобством при моделировании.

Общая формула перехода к относительным единицам имеет вид:

$$y = \frac{Y}{Y_б} \tag{3.1}$$

где Y – значение физической величины (параметра, воздействия, переменной состояния и др.) в и с х о д н о й системе единиц, например в системе единиц СИ;

$Y_б$ – б а з и с н о е значение, выраженное в той же исходной системе и принятое в качестве единицы измерения величины Y в системе относительных единиц;

y – значение величины в системе о т н о с и т е л ь н ы х единиц.

Для относительных значений угловой частоты напряжения и тока статора $\omega_s = \Omega_s / \Omega_б$, действующего значения фазного напряжения статора $u_s = U_s / U_б$, тока статора $i_s = I_s / I_б$ и относительной величины электромагнитного момента $m_s = M / M_б$ базисными примем их значения в точке номинального режима двигателя:

$$\Omega_б = \Omega_{s.н} = 2 \cdot \pi \cdot f_{s.н}; \qquad U_б = U_{s.н}; \qquad I_б = I_{s.н}; \tag{3.2}$$

$$M_б = M_{эм.н} = P_{эм.н} / \Omega_{0.н}$$

где $P_{эм.н}$ – электромагнитная мощность идеализированного АД, определяется с учётом коэффициента мощности и потерь в меди статора:

$$P_{эм.н} = 3U_{s.н} I_{s.н} \cos\varphi_н - {I_{s.н}}^2 R_1; \tag{3.3}$$

$\Omega_{0.н}$ – частота вращения магнитного поля АД, определяется с учётом частоты напряжения статора и числа пар полюсов АД:

$$\Omega_{0.н} = \Omega_б / z_p . \tag{3.4}$$

Все токи (статора, результирующий намагничивающий и ротора) представим в одном базисе, т. е.

$$i_s = I_s / I_б ; \qquad i_m = I_m / I_б ; \qquad i_r = I_r / I_б . \tag{3.5}$$

Скорость вращения $\omega = \Omega / \Omega_{бr}$ и абсолютное скольжение $\beta = (\Omega_0 - \Omega) / \Omega_{бr}$ ротора выразим в долях от синхронной скорости Ω_0 при

[1] Исключение составляют только виртуальные модели, созданные в среде Matlab

номинальной частоте, $\Omega_{бr} = \Omega_{0н}$ (в режиме идеального холостого хода частота ротора совпадает с частотой вращения магнитного поля).

Для относительных действующих значений всех потокосцеплений

$$\psi_s = \Psi_s / \Psi_б ; \qquad \psi_m = \Psi_m / \Psi_б ; \qquad \psi_r = \Psi_r / \Psi_б$$

выберем базисное значение

$$\Psi_б = U_б / \Omega_б .$$

Для активной $p_s = P_s / P_б$, реактивной $q_s = Q_s / P_б$, полной $s_s = S_s / P_б$, механической $p_{мех} = P_{мех} / P_б$ и мощности потерь $\Delta p_д = P_д / P_б$ базисной примем электромагнитную мощность в номинальном режиме

$$P_б = P_{эм.н} = M_б \Omega_{бr} .$$

Относительные значения параметров двигателя определим как

$$r_s = R_1 Z_б^{-1}; \qquad r_r = R_2' Z_б^{-1} \qquad l_m = X_0 Z_б^{-1}$$

$$l_{s\sigma} = X_1 Z_б^{-1}; \qquad l_{r\sigma} = X_2' Z_б^{-1},$$

где $Z_б$ – базисное сопротивление АД

$$Z_б = U_б / I_б .$$

Иногда при разработке модели следует проверить непротиворечивость между параметрами схемы замещения и паспортными данными машины [1]. Для этого удобно воспользоваться квадратным уравнением вида

$$A\beta_н^2 + B\beta_н + C = 0,$$

где $A = r_r^{-2}\left[\left(r_s^2 - 1\right)\left(1 + l_{r\sigma} l_m^{-1}\right)^2 + \left(l_{s\sigma} + l_{r\sigma} + l_{s\sigma} l_{r\sigma} l_m^{-1}\right)^2\right];$

$$B = 2 r_s r_r^{-1}; \qquad C = l_m^{-2}\left(r_s^2 + \left(l_m + l_{s\sigma}\right)^2 - 1\right).$$

Решение этого уравнения позволяет уточнить значение номинального скольжения $\beta_н$, строго соответствующего относительным параметрам схемы замещения двигателя. Возможен также и вариант коррекции относительных параметров модели по заданному паспортному значению номинального скольжения. В листинге 3.1 представлен пример пересчёта параметров в относительные единицы и их последующая проверка для двигателя 6А80В6У3.

Листинг 3.1

Перевод в относительные единицы и проверка параметров АД 6А80В6У3

$U_{sн} := 220$ $f_{sн} := 50$ $I_н := 1.7$ $Z_б := \frac{U_{sн}}{I_н}$

$R_1 := 14.671$ $R'_2 := 14.656$ $X_1 := 14.548$ $X'_2 := 19.03$ $X_\mu := 169.289$

$r_s := R_1 \cdot Z_б^{-1}$ $l_{s\sigma} := X_1 \cdot Z_б^{-1}$ $l_m := X_\mu \cdot Z_б^{-1}$

$r_r := R'_2 \cdot Z_б^{-1}$ $l_{r\sigma} := X'_2 \cdot Z_б^{-1}$

Относительные значения

$r_s = 0.113$ $r_r = 0.113$ $l_m = 1.308$ $l_{s\sigma} = 0.112$ $l_{r\sigma} = 0.147$

Относительные значения

$A := r_r^{-2} \cdot \left[\left(r_s^2 - 1 \right) \cdot \left(1 + l_{r\sigma} \cdot l_m^{-1} \right)^2 + \left(l_{s\sigma} + l_{r\sigma} + l_{s\sigma} \cdot l_{r\sigma} \cdot l_m^{-1} \right) \right]$

$B := 2 \cdot r_s \cdot r_r^{-1}$ $B = 2.002$ $C := l_m^{-2} \cdot \left[r_s^2 + \left(l_m + l_{s\sigma} \right)^2 - 1 \right]$

$D := B^2 - 4 \cdot A \cdot C$ $D = 182.382$

$s_{н1} := \frac{-B + \sqrt{D}}{2 \cdot A}$ $s_{н1} = -0.078$

$s_{н2} := \frac{-B - \sqrt{D}}{2 \cdot A}$ $s_{н2} = 0.105$

4. Установившиеся режимы АД при частотном управлении

В случае пренебрежения нелинейностью магнитной цепи АД и эффектом вытеснения тока в стержнях ротора, выражения для механической и электромеханической характеристик принимают следующий вид [1]:

$$m(\omega) = \xi_н \frac{{u_s}^2 \beta(\omega)}{2r_s\omega_s\beta(\omega) + (b^2 + c^2{\omega_s}^2)r_r^{-1}\beta(\omega)^2 + (d^2 + e^2{\omega_s}^2)r_r}; \qquad (4.1)$$

$$i_s(\omega) = u_s \sqrt{\frac{r_s^{-2}(b^2 r_r^{-1}\beta(\omega)^2 + d^2 r_r)}{2r_s\omega_s\beta(\omega) + (b^2 + c^2{\omega_s}^2)r_r^{-1}\beta(\omega)^2 + (d^2 + e^2{\omega_s}^2)r_r}}. \qquad (4.2)$$

где $\beta(\omega)$ – абсолютное скольжение ротора, определяется в соответствии со скоростью вращения и частотой подводимого напряжения:

$$\beta(\omega) = \omega_s - \omega; \qquad (4.3)$$

$\xi_н$ – коэффициент, определяющий соответствие между базовым и номинальным моментом АД:

$$\xi_н = \frac{1}{\cos\varphi_н - I_н R_1 / U_н}; \qquad (4.4)$$

b, c, d, e – коэффициенты, учитывающие во внимание параметры АД, определяются по [2]:

$$b = r_s(1 + l_{s\sigma} l_m^{-1}); \qquad c = l_{s\sigma} + l_{r\sigma} + l_{s\sigma} l_{r\sigma} l_m^{-1}; \qquad (4.5)$$

$$d = r_s l_m^{-1}; \qquad e = 1 + l_{s\sigma} l_m^{-1}.$$

Для построения графиков механической и электромеханической характеристик необходимо вычислить результаты функций $m(\omega)$ и $i_s(\omega)$ для всего диапазона скоростей вращения (ω = 0 ÷ 1). В листинге 4.1 представлен пример расчёта статических характеристик АД с помощью системы «Mathcad». Результаты приведённых расчётов показаны на рис. 4.1

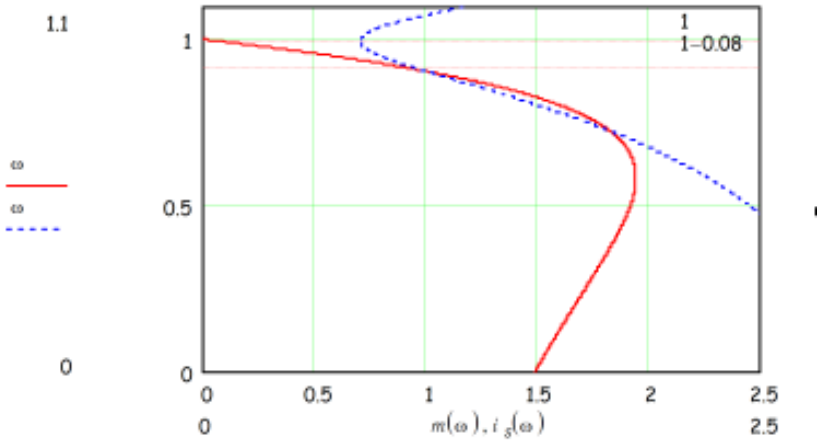

Рисунок 4.1. Механическая и электромеханическая характеристики АД

Листинг 4.1

Расчёт характеристик АД 6А80В6У3

$U_{sн} := 220$ $f_{sн} := 50$ $I_н := 1.7$ $R_1 := 14.317$ $\cos\phi_н := 0.7$ $r_s := 0.113$ $l_{sσ} := 0.112$ $l_m := 1.308$

$U_s := 220$ $f_s := 50$ $I_б := I_н$ $r_r := 0.114$ $l_{rσ} := 0.147$

$U_б := U_{sн}$ $\Omega_б := 2\cdot\pi\cdot f_{sн}$ $\Omega_s := 2\cdot\pi\cdot f_s$ $\omega_s := \frac{\Omega_s}{\Omega_б}$ $u_s := \frac{U_s}{U_б}$ $\zeta_н := \frac{1}{\cos\phi_н - \frac{I_н\cdot R_1}{U_{sн}}}$

$b := r_s\cdot\left(1 + l_{sσ}\cdot l_m^{-1}\right)$ $c := l_{sσ} + l_{rσ} + l_{sσ}\cdot l_{rσ}\cdot l_m^{-1}$ $d := r_s\cdot l_m^{-1}$ $e := 1 + l_{sσ}\cdot l_m^{-1}$

$\omega := -1, -0.999 .. 1.5$ $\beta(\omega) := \omega_s - \omega$

$$m(\omega) := \zeta_н\cdot\frac{u_s^2\cdot\beta(\omega)}{2\cdot r_s\cdot\omega_s\cdot\beta(\omega) + \left(b^2 + c^2\cdot\omega_s^2\right)\cdot r_r^{-1}\cdot\beta(\omega)^2 + \left(d^2 + e^2\cdot\omega_s^2\right)\cdot r_r}$$

$$i_s(\omega) := u_s\cdot\sqrt{\frac{r_s^{-2}\cdot\left(b^2\cdot r_r^{-1}\cdot\beta(\omega)^2 + d^2\cdot r_r\right)}{\left[2\cdot r_s\cdot\omega_s\cdot\beta(\omega) + \left(b^2 + c^2\cdot\omega_s^2\right)\cdot r_r^{-1}\cdot\beta(\omega)^2 + \left(d^2 + e^2\cdot\omega_s^2\right)\cdot r_r\right]}}$$

5. Преобразование координат

Преобразование координат является важным этапом построения математической модели электрической машины, позволяющим привести уравнения модели к виду, наиболее удобному для анализа режимов её работы и решения конкретных задач управления [1].

Предположим, что исходные переменные представляют симметричную трёхфазную систему синусоидальных токов, жестко связанную с обмотками статора:

$$\begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I\cos\omega_s\tau \\ I\cos(\omega_s\tau - \Delta) \\ I\cos\omega_s\tau(\omega_s\tau + \Delta) \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

где $\Delta = 2\pi/3$ сдвиг между соседними фазами; I – амплитудное значение.

Для перехода к токам, представленным в двухфазной стационарной системе координат, жестко связанной с обмотками статора, необходимо выполнить следующие преобразования [1]:

$$\begin{bmatrix} i_{\alpha s} \\ i_{\beta s} \\ i_{\gamma s} \end{bmatrix} = \mathbf{A_{FE}} \cdot \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix}, \tag{5.2}$$

где $i_{\alpha s}$, $i_{\beta s}$, $i_{\gamma s}$ – токи статора, представленные в «двухфазной» стационарной системе координат (для случая симметричной трёхфазной системы получаем $i_{\gamma s}$ = 0, т. к. отсутствуют переменные нулевой последовательности);

$$\mathbf{A_{FE}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

– матрица прямого преобразования координат вектора трёхфазных переменных в вектор «двухфазных» без учёта нормирования относительных параметров.

Дело в том, что при переходе от трёхфазной системы к «двухфазной», амплитудные значения переменных $i_{\alpha s}$, $i_{\beta s}$ в сравнении с амплитудными значениями исходных переменных возрастают в $\sqrt{3}/\sqrt{2}$ раз. Это создаёт некоторые неудобства в оценке, например, относительных величин фазных токов с помощью относительных величин преобразованных токов.

Поэтому при выполнении преобразования координат целесообразно выполнить рациональное изменение масштаба путём поэлементного умножения матрицы A_{FE} на $\sqrt{2}/\sqrt{3}$:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \mathbf{A_{FE}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Таким образом переход от трёхфазной системы координат к неподвижной «двухфазной» с учётом нормирования относительных параметров определяется матрицей A_1:

$$\begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{s\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \cdot \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

где $i_{s\alpha}$, $i_{s\beta}$, $i_{s\gamma}$ – токи статора, представленные в «двухфазной» стационарной системе координат с учётом нормирования относительных параметров;

Преобразование координат обладает свойством обратимости. Обратное преобразование выглядит следующим образом:

$$\begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{s\gamma} \end{bmatrix}, \quad (5.6) \qquad \text{где } \mathbf{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

– матрица обратная матрице A_1, выполняющая функции обратного преобразования координат вектора «двухфазных» переменных в вектор симметричных трёхфазных.

Пользуясь правилами матричной алгебры, получим выражения для прямого преобразования из трёхфазной системы в «двухфазную»:

$$i_{s\alpha} = \frac{2}{3} i_{sa} - \frac{1}{3} i_{sb} - \frac{1}{3} i_{sc} = \frac{1}{3}\left(2 i_{sa} - i_{sb} - i_{sc}\right); \qquad (5.8)$$

$$i_{s\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}} i_{sb} - \frac{1}{\sqrt{3}} i_{sc} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(i_{sb} - i_{sc}\right); \qquad (5.9)$$

$$i_{s\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{3} i_{sa} + \frac{\sqrt{2}}{3} i_{sb} + \frac{\sqrt{2}}{3} i_{sc} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(i_{sa} + i_{sb} + i_{sc}\right); \qquad (5.10)$$

– и обратного, из «двухфазной» в трёхфазную:

$$i_{sa} = i_{s\alpha} + \frac{1}{\sqrt{2}} i_{s\gamma}; \qquad (5.11)$$

$$i_{sb} = -\frac{1}{2} i_{s\alpha} + \frac{\sqrt{3}}{2} i_{s\beta} + \frac{1}{\sqrt{2}} i_{s\gamma}; \qquad (5.12)$$

$$i_{sc} = -\frac{1}{2} i_{s\alpha} - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{s\beta} + \frac{1}{\sqrt{2}} i_{s\gamma}. \qquad (5.13)$$

На рис. 5.1 приводится вектор тока I, представленный в виде соответствующих проекций одновременно в трёхфазной системе координат ABC и в «двухфазной» $O\alpha\beta$. Как уже говорилось ранее, обе координатные системы жестко связаны с обмотками статора асинхронного двигателя.

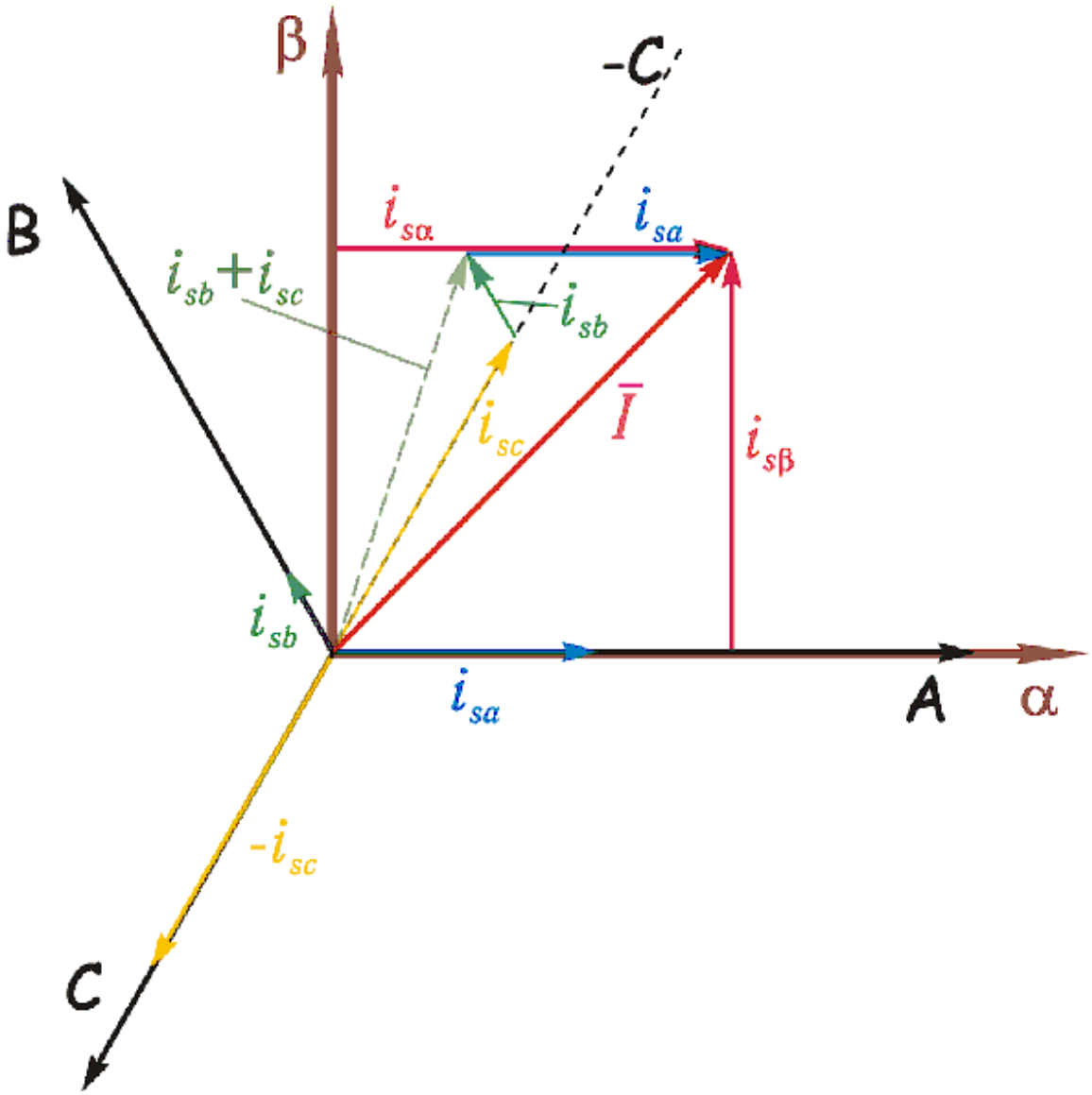

Рис. 5.1. Преобразование координат

На рис. 5.2 показан пример реализации прямого преобразования координат в системе «Matlab». Ниже, на рис. 5.3 приводится пример обратного преобразования. Данные модели оформлены в виде отдельных блоков и используются при моделировании работы АД в переходных режимах.

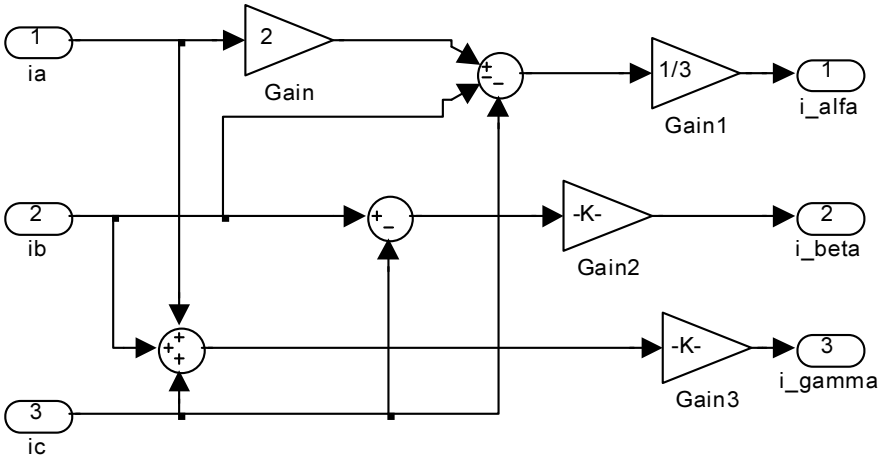

Рис. 5.2. Прямое преобразование координат из трёхфазной системы в «двухфазную»

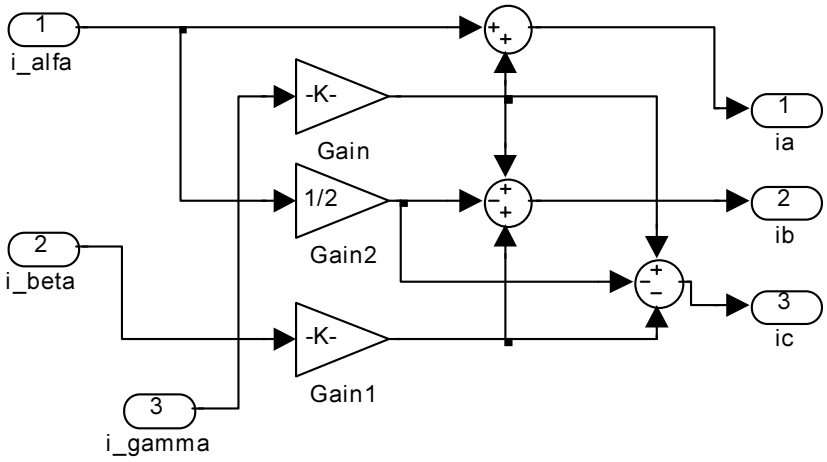

Рис. 5.3. Обратное преобразование координат из «двухфазной» системы в трёхфазную

В дальнейшем целесообразно перейти от неподвижной, связанной со статором системы координат $O\alpha\beta$ к вращающейся системе Oxy. Данную систему координат получим поворотом системы координат $O\alpha\beta$ относительно начала координат на угол θ_K, который будем рассматривать как произвольную величину [1].

Тогда вектор переменных $\begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{sz} \end{bmatrix}$, представленный во вращающейся системе, определим следующим образом:

$$\begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{sz} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2(\theta_k) \cdot \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{s\gamma} \end{bmatrix}, \tag{5.14}$$

где
$$\mathbf{A}_2(\theta_k) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & \sin(\theta_k) & 0 \\ -\sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

– ортогональная матрица поворота системы координат на угол, определяемый θ_k.

Обратное преобразование

$$\begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{s\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2^{-1}(\theta_k) \cdot \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{sz} \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

задаётся матрицей

$$\mathbf{A}_2^{-1}(\theta_k) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) & 0 \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.17}$$

Пользуясь правилами матричной алгебры нетрудно получить выражения для прямого перехода от неподвижной системы к вращающейся:

$$i_{sx} = i_{s\alpha} \cdot \cos(\theta_k) + i_{s\beta} \cdot \sin(\theta_k); \tag{5.18}$$

$$i_{sy} = i_{s\alpha} \cdot (-\sin(\theta_k)) + i_{s\beta} \cdot \cos(\theta_k); \tag{5.19}$$

$$i_{sz} = i_{s\gamma}; \tag{5.20}$$

На рис. 5.4 представлена геометрическая интерпретация перехода от стационарной системы координат $O\alpha\beta$ к вращающейся Oxy, характеризуемой углом θ_k.

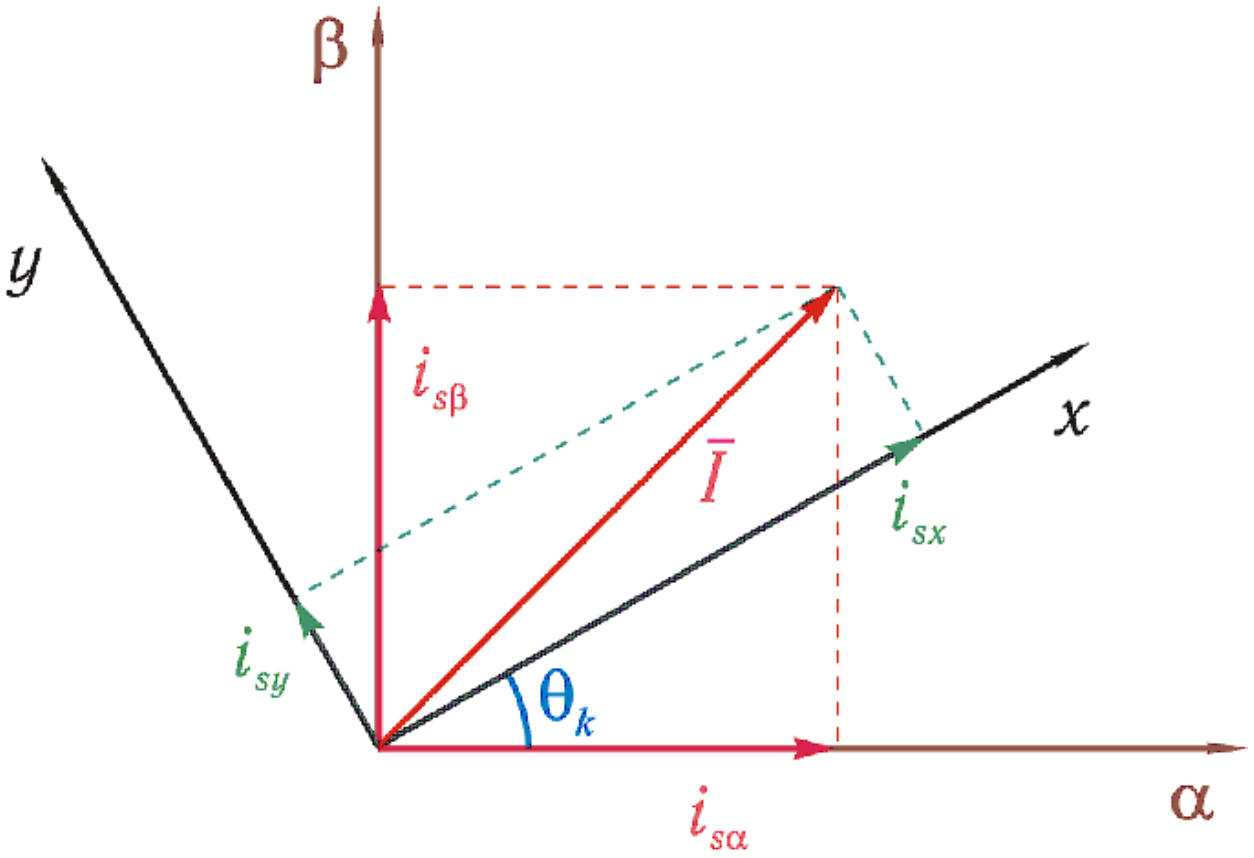

Рис. 5.4. Преобразование координат

Итак, в процессе преобразования координат можно выделить два основных этапа, определяемых формулами (5.5) и (5.14). Очевидно, что данное преобразование можно представить как одноэтапное:

$$\begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{sz} \end{bmatrix} = \mathbf{A_s}(\theta_k) \cdot \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

где матрица одноэтапного преобразования координат

$$\mathbf{A_s}(\theta_k) = \mathbf{A}_2(\theta_k) \cdot \mathbf{A}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & \cos\left(\theta_k - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_k + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta_k) & -\sin\left(\theta_k - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_k + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{5.22}$$

Одноэтапное преобразование координат

$$\begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix} = \mathbf{A_s}^{-1}(\theta_k) \cdot \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{sz} \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

можно осуществить с помощью матрицы обратного преобразования

$$\mathbf{A_s}^{-1}(\theta_k) = \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{A}_2^{-1}(\theta_k) = \\ = \frac{3}{2} \cdot \mathbf{A_s^T} \tag{5.24}$$

Упорядоченные наборы переменных i_{sa}, i_{sb}, i_{sc} *и* i_{sx}, i_{sy}, i_{sz}, определяют алгебраические векторы $\mathbf{I}_\mathbf{s}^{Fs}$ и $\mathbf{I_s}$:

$$\mathbf{I}_\mathbf{s}^{Fs} = \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix}; \qquad (5.25) \qquad \mathbf{I_s} = \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{sz} \end{bmatrix}. \qquad (5.26)$$

Верхний индекс F_s означает, что переменные представлены в трёхфазной системе координат, связанной с обмотками статора. Отсутствие верхнего индекса означает, что переменные представлены во вращающейся системе координат с произвольной ориентацией.

В соответствии с (5.25) и (5.26) формулы прямого и обратного преобразований приобретают простой и компактный вид:

$$\mathbf{I_s} = \mathbf{A_s}(\theta_k) \cdot \mathbf{I}_\mathbf{s}^{Fs}; \tag{5.27}$$

$$\mathbf{I}_\mathbf{s}^{Fs} = \mathbf{A_s}^{-1}(\theta_k) \cdot \mathbf{I_s}. \tag{5.28}$$

Для двухэтапного преобразования необходимо ввести вектор промежуточных переменных (пометим его верхним индексом G_s)

$$\mathbf{I}_\mathbf{s}^{Gs} = \begin{bmatrix} i_{s\alpha} \\ i_{s\beta} \\ i_{s\gamma} \end{bmatrix}. \tag{5.29}$$

Тогда формулы двухэтапного прямого и обратного преобразований координат имеют вид:

$$\mathbf{I}_\mathbf{s}^{Gs} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{I}_\mathbf{s}^{Fs}; \qquad \mathbf{I_s} = \mathbf{A}_2(\theta_k) \cdot \mathbf{I}_\mathbf{s}^{Gs} \tag{5.30}$$

$$\mathbf{I}_\mathbf{s}^{Gs} = \mathbf{A}_2^{-1}(\theta_k) \cdot \mathbf{I_s}; \qquad \mathbf{I}_\mathbf{s}^{Fs} = \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{I}_\mathbf{s}^{Gs} \tag{5.31}$$

В сравнении с одноэтапным, двухэтапное преобразование в некоторых случаях более удобно для построения моделей в связи с меньшим числом тригонометрических функций [1].

Итак, нами рассмотрены вопросы преобразования токов статора. Преобразование других переменных, относящихся к статору (напряжений и потокосцеплений), осуществляется аналогичным образом. Что касается переменных, относящихся к ротору (например, фазных токов обмотки ротора), то здесь необходимо учитывать следующее:

$$\mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Gr} = \begin{bmatrix} i_{rd} \\ i_{rq} \\ i_{ri} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Fr}; \qquad \mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Gs} = \begin{bmatrix} i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \\ i_{r\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Gr};$$

$$\mathbf{I}_{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} i_{rx} \\ i_{ry} \\ i_{rz} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2(\theta_k) \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Gs}. \qquad (5.32)$$

где $\mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Fr} = \begin{bmatrix} i_{ra} & i_{rb} & i_{rc} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ – токи ротора, представленные в трёхфазной системе координат, связанной с ротором (протекают по обмоткам ротора);

$\mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Gr} = \begin{bmatrix} i_{rd} & i_{rq} & i_{ri} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ – токи ротора, представленные в «двухфазной» системе координат, связанной с ротором (данная система координат вращается синхронно с ротором);

$\mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Gs} = \begin{bmatrix} i_{r\alpha} & i_{r\beta} & i_{r\gamma} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ – токи ротора, представленные в «двухфазной» системе координат, связанной со статором (неподвижной относительно статора и вращающейся относительно ротора);

$\mathbf{A}_2^{-1}(\theta)$ – матрица, учитывающая угол θ поворота ротора относительно статора, определяется по (5.17);

$\mathbf{I}_{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} i_{rx} & i_{ry} & i_{rz} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$ – токи ротора, представленные в системе координат с произвольной ориентацией (в общем случае данная система координат не имеет связи ни с ротором, ни со статором);

$\mathbf{A}_2(\theta_k)$ – матрица ортогонального поворота системы координат на угол θ_k, определяется по (5.15)

Формулы обратного преобразования

$$\mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Gs} = \mathbf{A}_2^{-1}(\theta_k)\cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}};$$

$$\mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Gr} = \mathbf{A}_2(\theta)\cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Gs}; \qquad (5.33)$$

$$\mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Fr} = \mathbf{A}_1^{-1}\cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Gr}.$$

Очевидно, что данные трёхэтапные преобразования можно заменить одноэтапными, осуществляемыми с помощью матриц

$$\mathbf{A}_{\mathbf{r}} = \mathbf{A}_2(\theta_k)\cdot \mathbf{A}_2^{-1}(\theta)\cdot \mathbf{A}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_k-\theta) & \cos\left(\theta_k-\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_k-\theta+\frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta_k-\theta) & -\sin\left(\theta_k-\theta-\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_k-\theta+\frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad (5.34)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{r}}^{-1} = \mathbf{A}_1^{-1}\cdot \mathbf{A}_2(\theta)\cdot \mathbf{A}_2^{-1}(\theta_k) =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot \mathbf{A}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{T}} \qquad (5.35)$$

Итоговые выражения для формул прямого преобразования имеют вид:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{s}} = \mathbf{A}_{\mathbf{s}}\cdot \mathbf{U}_{\mathbf{s}}^{Fs}; \qquad \mathbf{I}_{\mathbf{s}} = \mathbf{A}_{\mathbf{s}}\cdot \mathbf{I}_{\mathbf{s}}^{Fs}; \qquad \Psi_{\mathbf{s}} = \mathbf{A}_{\mathbf{s}}\cdot \Psi_{\mathbf{s}}^{Fs}; \qquad (5.36)$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{r}} = \mathbf{A}_{\mathbf{r}}\cdot \mathbf{U}_{\mathbf{r}}^{Fr}; \qquad \mathbf{I}_{\mathbf{r}} = \mathbf{A}_{\mathbf{r}}\cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Fr}; \qquad \Psi_{\mathbf{r}} = \mathbf{A}_{\mathbf{r}}\cdot \Psi_{\mathbf{r}}^{Fr}. \qquad (5.37)$$

Формулы обратного преобразования имеют вид:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{s}}^{Fs} = \mathbf{A}_{\mathbf{s}}^{-1}\cdot \mathbf{U}_{\mathbf{s}}; \qquad \mathbf{I}_{\mathbf{s}}^{Fs} = \mathbf{A}_{\mathbf{s}}^{-1}\cdot \mathbf{I}_{\mathbf{s}}; \qquad \Psi_{\mathbf{s}}^{Fs} = \mathbf{A}_{\mathbf{s}}^{-1}\cdot \Psi_{\mathbf{s}}; \qquad (5.38)$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{r}}^{Fr} = \mathbf{A}_{\mathbf{r}}^{-1}\cdot \mathbf{U}_{\mathbf{r}}; \qquad \mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Fr} = \mathbf{A}_{\mathbf{r}}^{-1}\cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}}; \qquad \Psi_{\mathbf{r}}^{Fr} = \mathbf{A}_{\mathbf{r}}^{-1}\cdot \Psi_{\mathbf{r}}. \qquad (5.39)$$

6. Моделирование динамических режимов АД

6.1. Потокосцепления и электродвижущие силы

В наиболее общем случае фазная обмотка электрической машины как элемент магнитосвязанной электрической цепи может быть представлена схемой замещения, изображенной на рис. 6.1 [1].

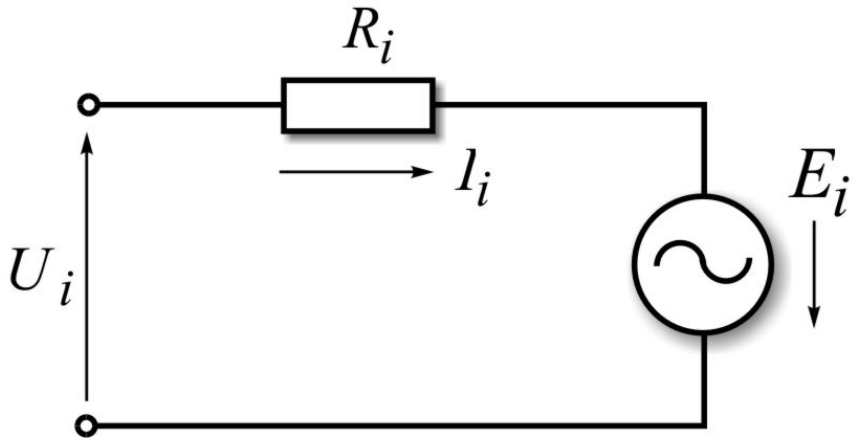

Рис. 6.1. Схема замещения обмотки как элемента магнитосвязанной цепи

При указанных на рисунке положительных направлениях величин переходные и установившиеся процессы в этой цепи описываются уравнением

$$U_i = R_i I_i - E_i, \tag{6.1}$$

где U_i – напряжение источника питания обмотки *i*-й фазы;

I_i – ток фазной обмотки;

R_i – активное сопротивление обмотки;

E_i – полная ЭДС, индуцированная в обмотке магнитным полем машины.

В соответствии с законом электромагнитной индукции полная ЭДС обмотки определяется формулой

$$E_i = -\frac{d\Psi_i}{dt}, \tag{6.2}$$

где Ψ_i – полное потокосцепление фазной обмотки

Отсюда уравнение (6.1) приобретает вид:

$$U_i = R_i I_i + \frac{d\Psi_i}{dt} \tag{6.3}$$

По своему физическому смыслу потокосцепление представляет количественную интегральную меру связи или же с ц е п л е н и я всех витков обмотки (замкнутых пространственных контуров) с распределённым в пространстве м а г н и т н ы м п о т о к о м машины. По своему математическому смыслу потокосцепление представляет собой величину, дифференцирование которой по времени определяет ЭДС, индуцированную в обмотке магнитным полем.

Магнитный поток распределён в активном пространстве машины неравномерно, причем количественной мерой интенсивности (плотности) магнитного потока в различных точках активного пространства служит магнитная индукция. Поэтому в общем случае потокосцепление обмотки *определяется интегрированием магнитной индукции в пределах площади, ограниченной замкнутыми пространственными контурами витков обмотки*.

В связи с волнообразным распределением магнитной индукции в пространстве магнитные потоки имеют характер пространственных волн, причём в машинах переменного тока эти волны перемещаются в пространстве относительно обмоток машины. Поэтому в каждое мгновение времени величина потокосцепления обмотки зависит не только от амплитуды и формы волны магнитного потока, но и от пространственного положения волны магнитного потока относительно каждого из витков обмотки, от размеров их пространственных контуров и количества витков.

Для упрощения анализа процессов электромагнитного преобразования энергии полное потокосцепление каждой из обмоток машины представляется в виде суммы двух составляющих – главного потокосцепления и потокосцепления рассеяния:

$$\Psi_i = \Psi_{im} + \Psi_{i\sigma} \tag{6.4}$$

Соответственно полная ЭДС обмотки разделяется на две составляющие – ЭДС от главного поля и ЭДС от поля рассеяния:

$$E_i = E_{im} + E_{i\sigma}; \tag{6.5}$$

$$E_{im} = -\frac{d\Psi_{im}}{dt}; \tag{6.6}$$

$$E_{i\sigma} = -\frac{d\Psi_{i\sigma}}{dt}. \tag{6.7}$$

где E_{im} и $E_{i\sigma}$ – это ЭДС, наведённые в обмотке соответственно главным магнитным потоком машины и потоком рассеяния обмотки.

Вводя допущение о линейности характеристики намагничивания цепи, по которой циркулирует поток рассеяния обмотки, можно выразить потокосцепление рассеяния в форме произведения тока в обмотке I_i на постоянный коэффициент самоиндукции от потока рассеяния (или же индуктивность рассеяния) $L_{i\sigma}$ данной обмотки:

$$\Psi_{i\sigma} = L_{i\sigma} I_i. \tag{6.8}$$

Тогда дифференциальное уравнение (6.3) электрической цепи обмотки приобретает вид:

$$U_i + E_{im} = R_i I_i + L_{i\sigma} \frac{dI_i}{dt}, \tag{6.9}$$

где главная ЭДС определяется формулой (6.6). Соответствующая схема замещения электрической цепи обмотки показана на рис. 6.2.

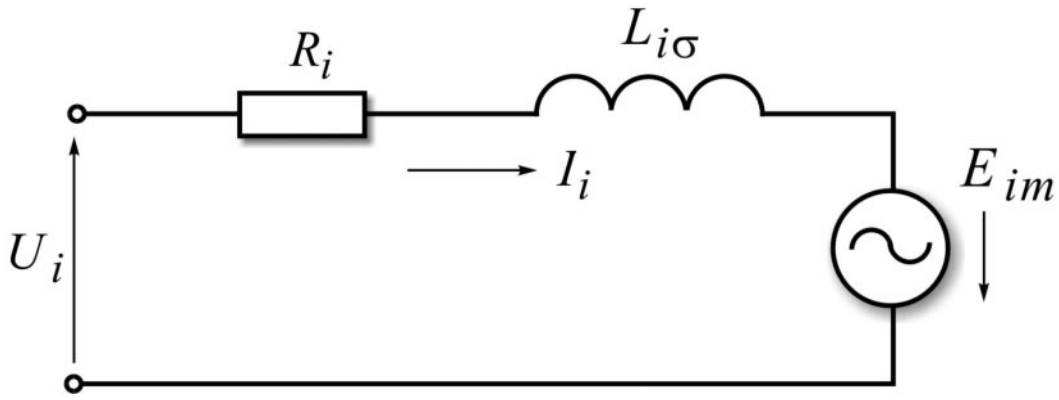

Рис. 6.2. Схема замещения обмотки как элемента магнитносвязанной цепи

В отличие от потока рассеяния сцеплённый с фазной обмоткой главный *магнитный поток* машины является результатом действия *всех* её фазных обмоток. Поэтому главную ЭДС фазной обмотки мы будем определять в предположении, что в каждое мгновение времени в машине существует распределённая вдоль воздушного зазора волна *результирующей* магнитодвижующей силы всех обмоток, которая вызывает соответствующую пространственную волну магнитной индукции в воздушном зазоре машины.

6.2. Уравнения электрического равновесия

Рассмотрим идеализированную трёхфазную симметричную неявнополюсную машину переменного тока, фазные обмотки статора и ротора которой получают питание от автономных источников с произвольной формой напряжения [1]. При выборе уровня идеализации свойств машины примем следующие допущения:

1. Не учитываются потери в стали.
2. Рабочее поле электрической машины считается плоскопараллельным.
3. Учитываются только первые пространственные гармоники магнитодвижущих сил обмоток и магнитной индукции главного магнитного поля вдоль полюсного деления.
4. Не учитываются насыщение путей рассеяния и взаимное влияние потоков рассеяния и главного магнитного потока.

При записи уравнений будем использовать основную (базовую) систему относительных единиц, описанную в предыдущем разделе. Примем, что переменные, относящиеся к обмотке ротора (напряжение, токи и потокосцепления), а также параметры обмотки ротора приведены к числу витков обмотки статора.

Исходя из соображений компактности и упрощения промежуточных преобразований наиболее целесообразной представляется векторно-матричная форма записи уравнений. Но чтобы за компактностью не терялся физический смысл описываемых процессов, а также для удобства их геометрической интерпретации будем, как и в работах [89, 123], оперировать трёхмерными векторами-столбцами и соответствующими квадратными матрицами.

Введём абстрактные алгебраические векторы-столбцы, составленные из мгновенных относительных значений напряжений источников питания, токов и потокосцеплений фазных обмоток статора и ротора:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{s}}^{Fs} = \begin{bmatrix} u_{sa} \\ u_{sb} \\ u_{sc} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{I}_{\mathbf{s}}^{Fs} = \begin{bmatrix} i_{sa} \\ i_{sb} \\ i_{sc} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{\Psi}_{\mathbf{s}}^{Fs} = \begin{bmatrix} \psi_{sa} \\ \psi_{sb} \\ \psi_{sc} \end{bmatrix}; \tag{6.10}$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{r}}^{Fr} = \begin{bmatrix} u_{ra} \\ u_{rb} \\ u_{rc} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Fr} = \begin{bmatrix} i_{ra} \\ i_{rb} \\ i_{rc} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{\Psi}_{\mathbf{r}}^{Fr} = \begin{bmatrix} \psi_{ra} \\ \psi_{rb} \\ \psi_{sc} \end{bmatrix}. \tag{6.11}$$

Назовём их векторами фазных (непреобразованных) величин.

Исходя из симметрии машины примем, что активные сопротивления фазных обмоток статора и ротора

$$\mathbf{R}_{\mathbf{s}}^{Fs} = diag\begin{bmatrix} r_{sa} & r_{sb} & r_{sc} \end{bmatrix} = r_s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix}; \tag{6.12}$$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{r}}^{Fr} = diag\begin{bmatrix} r_{ra} & r_{rb} & r_{rc} \end{bmatrix} = r_r \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_r & 0 & 0 \\ 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & r_r \end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

Тогда на основании законов Кирхгофа и Фарадея (6.1) для цепей статора и ротора записываем матричные уравнения:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{s}}^{Fs} = p\mathbf{\Psi}_{\mathbf{s}}^{Fs} + \mathbf{R}_{\mathbf{s}}^{Fs} \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{s}}^{Fs}; \tag{6.14}$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{r}}^{Fr} = p\mathbf{\Psi}_{\mathbf{r}}^{Fr} + \mathbf{R}_{\mathbf{r}}^{Fr} \cdot \mathbf{I}_{\mathbf{r}}^{Fr}, \tag{6.15}$$

где $p = d/d\tau$ – оператор дифференцирования переменных по относительному времени τ.

Для решения этих уравнений необходимо определить связь между фигурирующими в них потокосцеплениями и токами.

6.3. Преобразование уравнений электромагнитных контуров

Преобразуем сначала дифференциальные уравнения (6.14) и (6.15), рассматривая параметр преобразования q_k как переменную величину. Для этого произведём в них подстановку выражений (5.38) и (5.39).

$$\mathbf{A_s^{-1}} \cdot \mathbf{U_s} = p\left(\mathbf{A_s^{-1}} \cdot \mathbf{\Psi_s}\right) + \mathbf{R_s^{Fs}} \cdot \mathbf{A_s^{-1}} \cdot \mathbf{I_s} \tag{6.16}$$

$$\mathbf{A_r^{-1}} \cdot \mathbf{U_r} = p\left(\mathbf{A_r^{-1}} \cdot \mathbf{\Psi_r}\right) + \mathbf{R_r^{Fr}} \cdot \mathbf{A_r^{-1}} \cdot \mathbf{I_r} \tag{6.17}$$

Применяя правило дифференцирования произведения, получаем:

$$\mathbf{A_s^{-1}} \cdot \mathbf{U_s} = \mathbf{A_s^{-1}} \cdot p\mathbf{\Psi_s} + p\mathbf{A_s^{-1}} \cdot \mathbf{\Psi_s} + \mathbf{R_s^{Fs}} \cdot \mathbf{A_s^{-1}} \cdot \mathbf{I_s} \tag{6.18}$$

$$\mathbf{A_r^{-1}} \cdot \mathbf{U_r} = \mathbf{A_r^{-1}} \cdot p\mathbf{\Psi_r} + p\mathbf{A_r^{-1}} \cdot \mathbf{\Psi_r} + \mathbf{R_r^{Fr}} \cdot \mathbf{A_r^{-1}} \cdot \mathbf{I_r} \tag{6.19}$$

В соответствии с правилами матричной алгебры умножим слева обе части этих уравнений соответственно на матрицы $\mathbf{A_s}$ и $\mathbf{A_r}$. В результате получим следующие дифференциальные уравнения для преобразованных напряжений, токов и потокосцеплений:

$$\mathbf{U_s} = p\mathbf{\Psi_s} + \mathbf{A_s} \cdot p\mathbf{A_s^{-1}} \cdot \mathbf{\Psi_s} + \mathbf{A_s} \cdot \mathbf{R_s^{Fs}} \cdot \mathbf{A_s^{-1}} \cdot \mathbf{I_s} \tag{6.20}$$

$$\mathbf{U_r} = p\mathbf{\Psi_r} + \mathbf{A_r} \cdot p\mathbf{A_r^{-1}} \cdot \mathbf{\Psi_r} + \mathbf{A_r} \cdot \mathbf{R_r^{Fr}} \cdot \mathbf{A_r^{-1}} \cdot \mathbf{I_r} \tag{6.21}$$

Аналогичным образом преобразуются и другие уравнения модели. Подробный вывод этих уравнений, определяющих с учётом принятых допущений модель электромагнитных контуров симметричной машины во вращающейся системе координат, дан в работе [123]. Эти уравнения имеют вид:

$$\begin{gathered}
\mathbf{U_s} = \mathbf{A_s} \cdot \mathbf{U_s^{Fs}}; \quad \mathbf{U_r} = \mathbf{A_r} \cdot \mathbf{U_r^{Fr}}; \\
\mathbf{U_s} = p\mathbf{\Psi_s} + \omega_k \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Psi_s} + \mathbf{R_s} \cdot \mathbf{I_s}; \\
\mathbf{U_r} = p\mathbf{\Psi_r} + \beta_k \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Psi_r} + \mathbf{R_r} \cdot \mathbf{I_r}; \\
\mathbf{\Psi_s} = \mathbf{\Psi_m} + \mathbf{\Psi_{s\sigma}}; \\
\mathbf{\Psi_r} = \mathbf{\Psi_m} + \mathbf{\Psi_{r\sigma}}; \\
\mathbf{\Psi_m} = \mathbf{F_m} \cdot \mathbf{I_m} = l_m\left(\left\|\mathbf{I_m}\right\|\right) \cdot \mathbf{I_m}; \\
\mathbf{I_m} = \mathbf{C} \cdot \left(\mathbf{I_s} + \mathbf{I_r}\right); \\
\mathbf{\Psi_{s\sigma}} = \mathbf{L_{s\sigma}} \cdot \mathbf{I_{s\sigma}}; \\
\mathbf{\Psi_{r\sigma}} = \mathbf{L_{r\sigma}} \cdot \mathbf{I_{r\sigma}}; \\
\beta_k = \omega_k - \omega; \\
\omega_k = p\theta_k; \\
\omega = p\theta.
\end{gathered} \tag{6.22}$$

Здесь вместе с преобразованными переменными состояния фигурируют преобразованные матрицы активных сопротивлений и индуктивностей рассеяния обмоток статора и ротора:

$$\mathbf{R_s} = \mathbf{A_s} \cdot \mathbf{R_s^{Fs}} \cdot \mathbf{A_s^{-1}} = \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 \\ 0 & 0 & r_s \end{bmatrix}; \tag{6.23}$$

$$\mathbf{R_r} = \mathbf{A_r} \cdot \mathbf{R_r^{Fs}} \cdot \mathbf{A_r^{-1}} = \begin{bmatrix} r_r & 0 & 0 \\ 0 & r_r & 0 \\ 0 & 0 & r_r \end{bmatrix}; \tag{6.24}$$

$$\mathbf{L_{s\sigma}} = \mathbf{A_s} \cdot \mathbf{L_{s\sigma}^{Fs}} \cdot \mathbf{A_s^{-1}} = \begin{bmatrix} l_{s\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & l_{s\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & l_{s\sigma} \end{bmatrix}; \tag{6.25}$$

$$\mathbf{L_{r\sigma}} = \mathbf{A_r} \cdot \mathbf{L_{r\sigma}^{Fr}} \cdot \mathbf{A_r^{-1}} = \begin{bmatrix} l_{r\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & l_{r\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & l_{r\sigma} \end{bmatrix}; \tag{6.26}$$

Кроме того, в преобразованные уравнения входят следующие постоянные матричные коэффициенты:

$$\mathbf{B} = \omega_k^{-1} \cdot \mathbf{A_s} \cdot p\mathbf{A_s^{-1}} = \beta_k^{-1} \cdot \mathbf{A_r} \cdot p\mathbf{A_r^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \tag{6.27}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A_s} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{A_s^{-1}} = \mathbf{A_r} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{A_r^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.28}$$

В процессе вывода этих уравнений в [123] выявлены механизмы действия функций пространственного распределения МДС фазных обмоток и влияния насыщения главной магнитной цепи. Обоснована целесообразность разложения векторов состояния системы на намагничивающую и нейтральную составляющие.

Показано, что по своему физическому смыслу результирующий вектор преобразованных намагничивающих токов

$$\mathbf{I_m} = \mathbf{C} \cdot \left(\mathbf{I_s} + \mathbf{I_r} \right) \tag{6.29}$$

– это такая часть суммы токов статора и ротора, из которой исключены компоненты, не участвующие в создании главного магнитного потока вследствие действия функций распределения намагничивающих сил фазных обмоток вдоль дуги воздушного зазора.

При учёте насыщения главной магнитной цепи закон соответствия между алгебраическими векторами $\mathbf{\Psi_m}$ и $\mathbf{I_m}$ задаётся нелинейным оператором $\mathbf{F_m}$, осуществляющим над вектором $\mathbf{I_m}$ преобразование типа нелинейного растяжения (сжатия) без изменения его направления. В символической форме записи:

$$\mathbf{\Psi_m} = \mathbf{F_m} \cdot \mathbf{I_m} . \tag{6.30}$$

Существует также обратный оператор, позволяющий найти ток по известному потокосцеплению:

$$\mathbf{I_m} = \mathbf{F_m^{-1}} \cdot \mathbf{\Psi_m} . \tag{6.31}$$

Эти операторы удобно задавать с помощью переменного коэффициента l_m, имеющего смысл тангенциальной динамической индуктивности [100], определяемой по кривой намагничивания:

$$l_m = \frac{\Psi_m \left(i_m \right)}{i_m} = l_m \left(i_m \right) \tag{6.32}$$

либо

$$l_m = \frac{\Psi_m}{i_m \left(\Psi_m \right)} = l_m \left(\Psi_m \right) \tag{6.33}$$

Тогда формулы связи главных потокосцеплений и намагничивающих токов приобретают простой вид:

$$\psi_m = l_m \left(i_m \right) \cdot \mathbf{I_m} ; \tag{6.34}$$

$$\mathbf{I_m} = l_m^{-1} \left(\psi_m \right) \cdot \psi_m , \tag{6.35}$$

где $i_m = \left\| \mathbf{I_m} \right\| = \sqrt{i_{mx}^2 + i_{my}^2}$;

$\psi_{\mathbf{m}} = \left\| \mathbf{\Psi_m} \right\| = \sqrt{\psi_{mx}^2 + \psi_{my}^2}$ – нормы векторов.

При допущении о линейности характеристики главного магнитного пути коэффициент $l_m = const$ и представляет собой *постоянный коэффициент взаимной индукции трёхфазных обмоток статора и ротора, а параметр* $x_m = \omega_s \cdot l_m = const$ *есть реактивное сопротивление намагничивающей ветви* Т-образной схемы замещения машины.

На основе описанного выше разделения потоков рассеяния в работе [123] преобразованных уравнений электромагнитных контуров получены выражения (6.25) и (6.26) матричных коэффициентов индуктивностей рассеяния $\mathbf{L_{s\sigma}}$ и $\mathbf{L_{r\sigma}}$. Они дают теоретическое обоснование факту различия сопротивлений рассеяния машины при питании её системами токов нулевой и ненулевой последовательностей.

При решении задач анализа свойств машины и построении автоматических управляющих устройств целесообразно дальнейшее преобразование уравнений (6.22) с целью исключения из них максимально возможного количества промежуточных переменных [1].

Рассмотрим некоторые варианты подобного преобразования уравнений электромагнитных контуров машины с нелинейной характеристикой намагничивания при питании её от автономных источников линейно независимых напряжений.

Модель в переменных $\mathbf{I_s} - \mathbf{\Psi_r}$. В результате исключения путём подстановок из системы уравнений (6.22) потокосцеплений $\mathbf{\Psi_s}$ и токов $\mathbf{I_r}$ преобразованные уравнения электромагнитных контуров имеют вид:

$$\mathbf{U_s} - \mathbf{K_r} \cdot \mathbf{U_r} = \mathbf{L_э} \cdot p\mathbf{I_s} + \left(\mathbf{R_э} + \omega_k \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L_э}\right) \cdot \mathbf{I_s} + \left(\omega \cdot \mathbf{K_r} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{K_r} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{r} + p\mathbf{K_r}\right) \cdot \mathbf{\Psi_r}$$

$$\mathbf{U_r} = p\mathbf{\Psi_r} + \left(\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{r} + \beta_k \cdot \mathbf{B}\right) \cdot \mathbf{\Psi_r} - \mathbf{R_r} \cdot \mathbf{K_r} \cdot \mathbf{I_s}; \qquad (6.36)$$

Выражения матричных коэффициентов этих уравнений:

$$\mathbf{R_э} = \begin{bmatrix} r_э & 0 & 0 \\ 0 & r_э & 0 \\ 0 & 0 & r_э \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{L_э} = \begin{bmatrix} l_э & 0 & 0 \\ 0 & l_э & 0 \\ 0 & 0 & l_{s\sigma} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K_r} = \begin{bmatrix} k_r & 0 & 0 \\ 0 & k_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \alpha_r & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_r & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{r\sigma}^0 \end{bmatrix}. \qquad (6.37)$$

Элементы матриц:

$$r_э = r_s + k_r^2 \cdot r_r + pk_r; \qquad l_э = l_{s\sigma} + k_r \cdot l_{r\sigma};$$

$$k_r = \frac{l_m}{l_m + l_{r\sigma}} = \frac{\psi_m(i_m)}{\psi_m(i_m) + l_{r\sigma} \cdot i_m} = k_r(i_m); \tag{6.38}$$

$$\alpha_r = \frac{r_r}{l_m + l_{r\sigma}} = \frac{r_r \cdot i_m}{\psi_m(i_m) + l_{r\sigma} \cdot i_m} = \alpha_r(i_m);$$

$$\alpha_{r\sigma}^0 = r_r \Big/ l_{r\sigma}^0; \qquad i_m = \|\mathbf{I_m}\|; \qquad \psi_m = \|\mathbf{\Psi_m}\|.$$

Как видно, элементы матричных коэффициентов зависят от степени насыщения главного магнитного пути. Поэтому необходимы дополнительные уравнения, позволяющие найти ток i_m или ψ_m как функции переменных состояния уравнений (6.36). Использовав конечные уравнения связи токов и потокосцеплений, из системы (6.22) можно получить уравнения связи:

$$\mathbf{\Psi_m} + l_{r\sigma} \cdot \mathbf{I_m} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{\Psi_r} + \mathbf{L_{r\sigma}} \cdot \mathbf{I_s}); \tag{6.39}$$

$$\mathbf{\Psi_m} = l_m(i_m) \cdot \mathbf{I_m}. \tag{6.40}$$

Так как нормы результирующих векторов, определяющих левую и правую части уравнения (6.39), должны быть равны, а

$$\|\mathbf{\Psi_m} + l_{r\sigma} \cdot \mathbf{I_m}\| = \psi_m + l_{r\sigma} \cdot i_m, \tag{6.41}$$

то, следовательно,

$$\psi_m(i_m) + l_{r\sigma} \cdot i_m = \|\mathbf{C} \cdot (\mathbf{\Psi_r} + \mathbf{L_{r\sigma}} \cdot \mathbf{I_s})\|. \tag{6.42}$$

Относительно переменной i_m (либо ψ_m) функция (6.42) задана в неявном виде. При аналоговом моделировании решение уравнения связи (6.42) удобно осуществлять в соответствии со структурной схемой, изображенной на рис. 6.3.

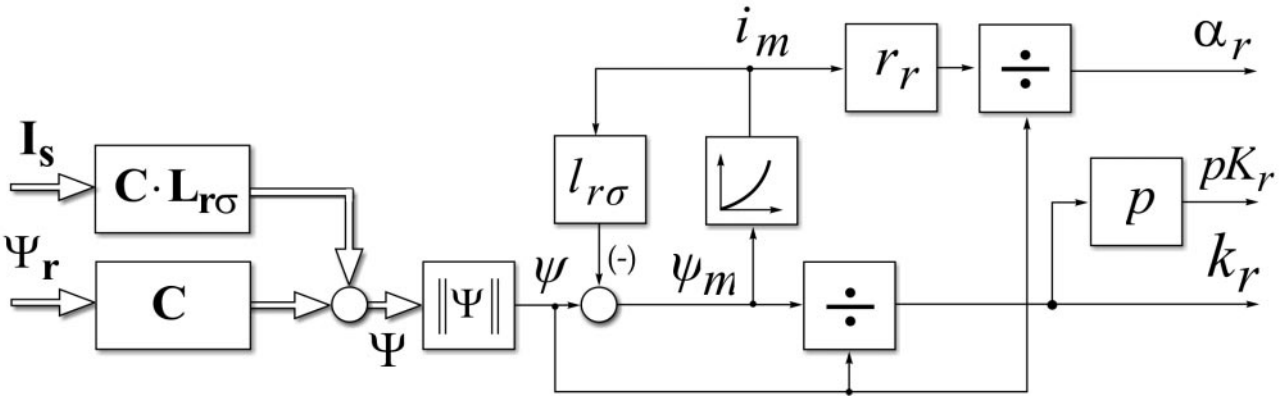

Рис. 6.3. Структурная схема решения уравнения связи (в) и расчёта переменных коэффициентов уравнений модели

6.4. Выражение для электромагнитного момента

Принцип действия электромагнитной электрической машины как электромеханического преобразователя энергии основан на действующих одновременно двух законах электричества и магнетизма – законе электромагнитной индукции и законе электромеханического взаимодействия тока в проводнике и магнитного поля.

Выражение для момента трёхфазной симметричной машины через токи и потокосцепления представленные во вращающейся системе координат имеет вид скалярного произведения векторов «•»:

$$m = \xi_н \cdot \left(\mathbf{\Psi_r} \bullet \mathbf{B} \cdot \mathbf{I_r}\right) = \xi_н \cdot \left(\begin{bmatrix} \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \\ \psi_{rz} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{rx} \\ i_{ry} \\ i_{rz} \end{bmatrix} \right) = \tag{6.43}$$

$$= \xi_н \cdot \left(\psi_{ry} \cdot i_{rx} - \psi_{rx} \cdot i_{ry}\right)$$

Данная формула получена на основе анализа сил, воздействующих на активные проводники обмотки ротора в случае *синусоидального* пространственного распределения индукции главного магнитного поля, и *определяет электромагнитный момент без учёта влияния высших пространственных гармоник индукции магнитного поля*. Напомним, что в системе относительных единиц, ориентированной на электромагнитную мощность машины (3), базисный момент всегда должен быть равен номинальному. Для выполнения указанного соответствия в формулу введён коэффициент $\xi_н$, определяемый по (4.4). Подробный вывод формулы (6.43) представлен в [1].

Для системы уравнений модели АД с ориентацией на переменные статора подойдёт приведённое соотношение:

$$m = \xi_н \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{\Psi_s} \bullet \mathbf{I_s}\right) = \xi_н \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_{sx} \\ \psi_{sy} \\ \psi_{sz} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{sz} \end{bmatrix}\right) = \tag{6.44}$$

$$= \xi_н \cdot \left(\psi_{sx} \cdot i_{sy} - \psi_{sy} \cdot i_{sx}\right)$$

В ряде случаев бывают удобны формулы с одновременной ориентацией на параметры и статора и ротора:

$$m = \xi_н \cdot k_r \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{\Psi_r} \bullet \mathbf{I_s}\right) = \xi_н \cdot k_r \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \\ \psi_{rz} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} i_{sx} \\ i_{sy} \\ i_{sz} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \xi_н \cdot k_r \cdot \left(\psi_{rx} \cdot i_{sy} - \psi_{ry} \cdot i_{sx}\right) \tag{6.45}$$

$$m = \xi_н \cdot l_{\sigma э}^{-1} \cdot \left(\mathbf{\Psi_s} \bullet \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Psi_r}\right) = \xi_н \cdot l_{\sigma э}^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} \psi_{sx} \\ \psi_{sy} \\ \psi_{sz} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_{rx} \\ \psi_{ry} \\ \psi_{rz} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \xi_н \cdot l_{\sigma э}^{-1} \cdot \left(\psi_{sy} \cdot \psi_{rx} - \psi_{sx} \cdot \psi_{ry}\right) \tag{6.46}$$

где $k_r = \left(1 + l_m^{-1} \cdot l_{r\sigma}\right)^{-1}$; $l_{\sigma э} = l_{s\sigma} + l_{r\sigma} + l_{s\sigma} \cdot l_{r\sigma} \cdot l_m^{-1}$.

6.5. Уравнения механического движения

Для построения полной математической модели машины как управляемого электромеханического преобразователя энергии необходимо систему уравнений электромагнитных контуров и уравнений электромеханического преобразования энергии дополнить уравнениями механического движения ротора. Для случая $J = const$

$$p\omega = J^{-1} \cdot \left(m - m_c\right); \tag{6.47}$$

$$p\theta = \omega, \tag{6.48}$$

где J и m_c – приведённые к валу двигателя относительные значения момента инерции механической системы и момента статического сопротивления.

6.6. Модель асинхронной машины

Для построения моделей насыщенной асинхронной машины с короткозамкнутой обмоткой ротора и питанием обмоток статора от автономных источников можно использовать уравнения (6.22) либо (6.36), полагая $\mathbf{U_r} = 0$. Кроме того, полезно учитывать следующее.

В соответствии с принятым допущением о синусоидальности распределения намагничивающих сил фазных обмоток вдоль воздушного зазора, трёхфазная симметричная электрическая машина, как трансформатор ЭДС, является идеальным заграждающим фильтром по отношению к нейтральным составляющим. Поэтому данные составляющие в системах токов и потокосцеплений фазных обмоток статора могут иметь место только при наличии нейтральных составляющих в системе напряжений источника питания статора.

Это утверждение справедливо и для обмоток ротора. Очевидно, при $\mathbf{U_r^{Fr}} = 0$ компоненты вектора $\mathbf{U_{rn}^{Fr}}$ также равны нулю, что обеспечивает отсутствие нейтральных составляющих в системе фазных токов и потокосцеплений обмоток ротора даже при наличии таковых в цепях обмоток статора. Следовательно, в данном случае нет нужды различать векторы полных и намагничивающих токов ротора. Поэтому фигурирующее в (6.22) уравнение намагничивающего тока целесообразно представить в виде

$$\mathbf{I_m} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{I_s} + \mathbf{I_r}. \tag{6.49}$$

Эта формула даёт определённые удобства при построении моделей машины, поскольку вырожденная (не имеющая обратной) матрица $\mathbf{C}$ здесь не препятствует определению тока $\mathbf{I_r}$ по известным токам $\mathbf{I_s}$ и $\mathbf{I_m}$. С учётом вышеизложенного соответствующие уравнениям общего вида (6.22) и (6.36) системы уравнений электромагнитных контуров асинхронной машины с короткозамкнутым ротором приобретают следующий вид:

$$\begin{gathered}
\mathbf{U_s} = \mathbf{A_s} \cdot \mathbf{U_s^{Fs}};\\
\mathbf{U_s} = p\boldsymbol{\Psi_s} + \omega_k \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Psi_s} + \mathbf{R_s} \cdot \mathbf{I_s};\\
0 = p\boldsymbol{\Psi_r} + \beta_k \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Psi_r} + \mathbf{R_r} \cdot \mathbf{I_r};\\
\boldsymbol{\Psi_s} = \boldsymbol{\Psi_m} + \mathbf{L_{s\sigma}} \cdot \mathbf{I_s};\\
\boldsymbol{\Psi_r} = \boldsymbol{\Psi_m} + \mathbf{L_{r\sigma}} \cdot \mathbf{I_r};\\
\boldsymbol{\Psi_m} = \mathbf{F_m} \cdot \mathbf{I_m}; \qquad \mathbf{I_m} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{I_s} + \mathbf{I_r};\\
\beta_k = p(\theta_k - \theta); \qquad \mathbf{I_s^{Fs}} = \mathbf{A_s^{-1}} \cdot \mathbf{I_s}.
\end{gathered} \tag{6.50}$$

$$\mathbf{U_s} = \mathbf{L_э} \cdot p\mathbf{I_s} + \left(\mathbf{R_э} + \omega_k \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L_э}\right) \cdot \mathbf{I_s} + \left(\omega \cdot \mathbf{K_r} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{K_r} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{r} + p\mathbf{K_r}\right) \cdot \boldsymbol{\Psi}_\mathbf{r};$$

$$\mathbf{K_r} \cdot \mathbf{R_r} \cdot \mathbf{I_s} = p\boldsymbol{\Psi}_\mathbf{r} + \left(\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{r} + \beta_k \cdot \mathbf{B}\right) \cdot \boldsymbol{\Psi}_\mathbf{r};$$

$$\boldsymbol{\Psi}_\mathbf{m} + \mathbf{L}_{\mathbf{r}\sigma} \cdot \mathbf{I_m} = \boldsymbol{\Psi}_\mathbf{r} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{r}\sigma} \cdot \mathbf{I_s}; \qquad (6.51)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_\mathbf{m} = \mathbf{F_m} \cdot \mathbf{I_m};$$

$$\beta_k = p\left(\theta_k - \theta\right);$$

$$\mathbf{I_s^{Fs}} = \mathbf{A_s^{-1}} \cdot \mathbf{I_s}.$$

Модель общего вида

На рис. 6.4 показана структурная схема модели, соответствующая уравнениям общего вида (6.43), (6.47), (6.48), (6.50) и представляющая собой совокупность связанных определённым образом многомерных и одномерных звеньев направленного действия. На входе модели машины включен блок преобразования вектора фазных напряжений $\mathbf{U_s^{Fs}}$ в вектор $\mathbf{U_s}$ с помощью матрицы прямого преобразования $\mathbf{A_s}(\theta_k)$.

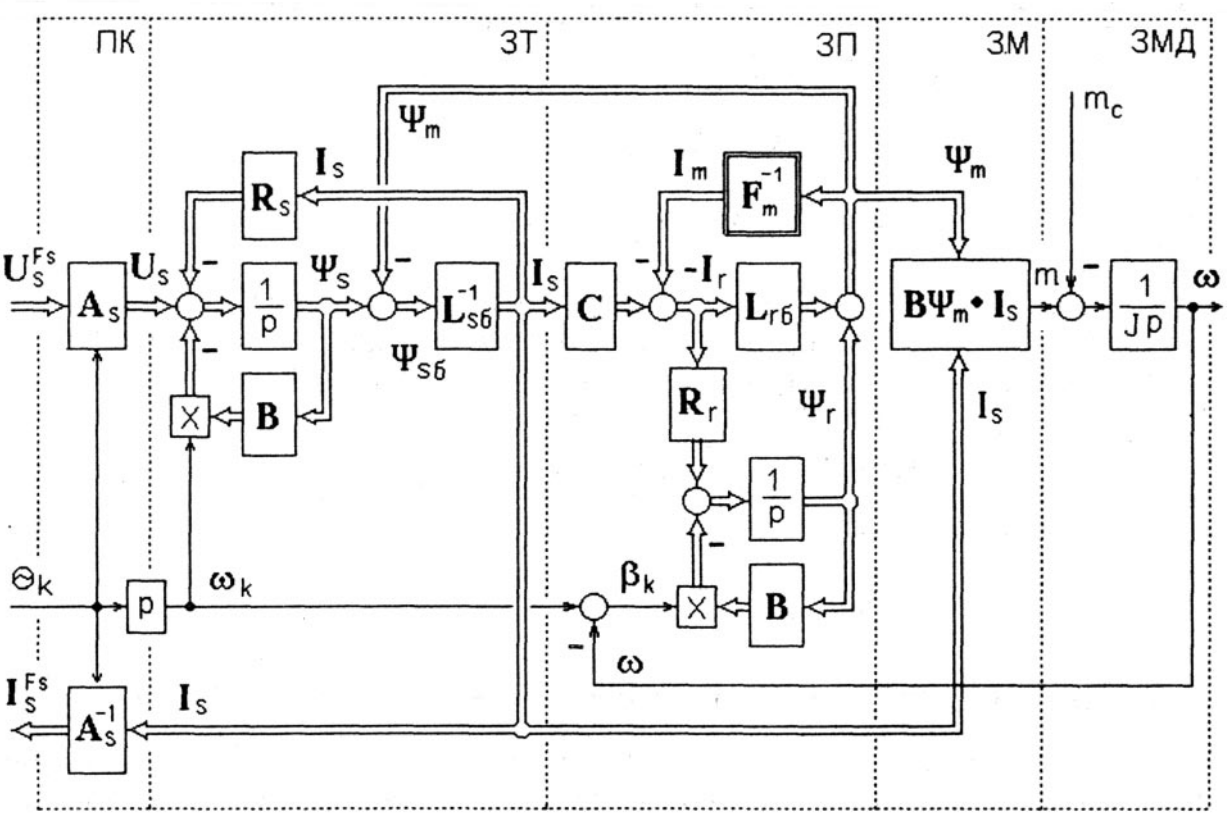

Рис. 6.4. Структурная схема модели асинхронной машины с короткозамкнутым ротором

Для определения реакции машины как элемента нагрузки источника питания в модели предусмотрено вычисление вектора фазных токов $\mathbf{I}_{\mathbf{s}}^{Fs}$ с помощью матрицы обратного преобразования $\mathbf{A}_{\mathbf{s}}^{-1}(\theta_k)$. Параметр преобразования θ_k может быть произвольной функцией времени либо переменных состояния моделируемого объекта. Нелинейность главной магнитной цепи машины учитывается с помощью блока $\mathbf{F}_{\mathbf{m}}^{-1}$, осуществляющего нелинейное преобразование вектора $\mathbf{\Psi}_{\mathbf{m}}$ в вектор $\mathbf{I}_{\mathbf{m}}$. На рис. 6.5,а изображена структурная схема этого блока. На рис. 6.5,б показан более простой и удобный для моделирования вариант, в котором взамен нелинейного элемента с характеристикой $i_m(\psi_m)$ введён элемент с характеристикой:

$$l_m^{-1} = f\left(\psi_m^2\right). \tag{6.52}$$

Данная функция легко рассчитывается из кривой намагничивания. Преобразование вектора $\mathbf{I}_{\mathbf{m}}$ в вектор $\mathbf{\Psi}_{\mathbf{m}}$ показано на рис. 6.5,в.

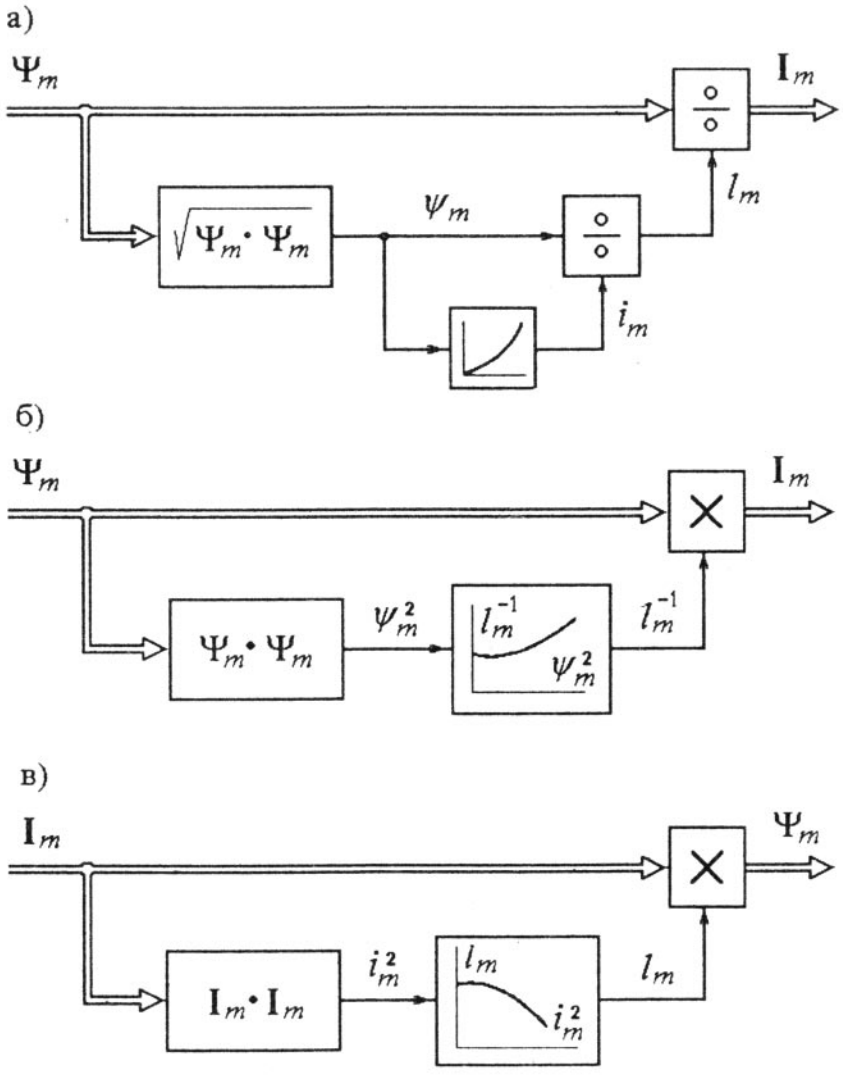

Рис. 6.5. Учёт нелинейности характеристики намагничивания

Существенен тот факт, что *при учёте нелинейности кривой намагничивания каналы преобразования компонент вектора результирующих намагничивающих токов в компоненты вектора главных потокосцеплений (либо обратного преобразования) оказываются неавтономными*. Любое изменение одной из входных величин, например i_{mx}, при постоянстве другой (i_{my}) влияет на величину l_m и, следовательно, приводит к изменению как ψ_{mx}, так и ψ_{my}.

Модель в переменных $\mathbf{I_s} - \Psi_\mathbf{r}$

Структурная схема модели, построенной на основе уравнений (6.51), изображена на рис. 6.6. Как показано ранее, исключение переменных $\mathbf{\Psi_s}$, $\mathbf{I_r}$ из уравнений электромагнитных контуров приводит к необходимости вычисления переменных коэффициентов α_r, k_r и pk_r.

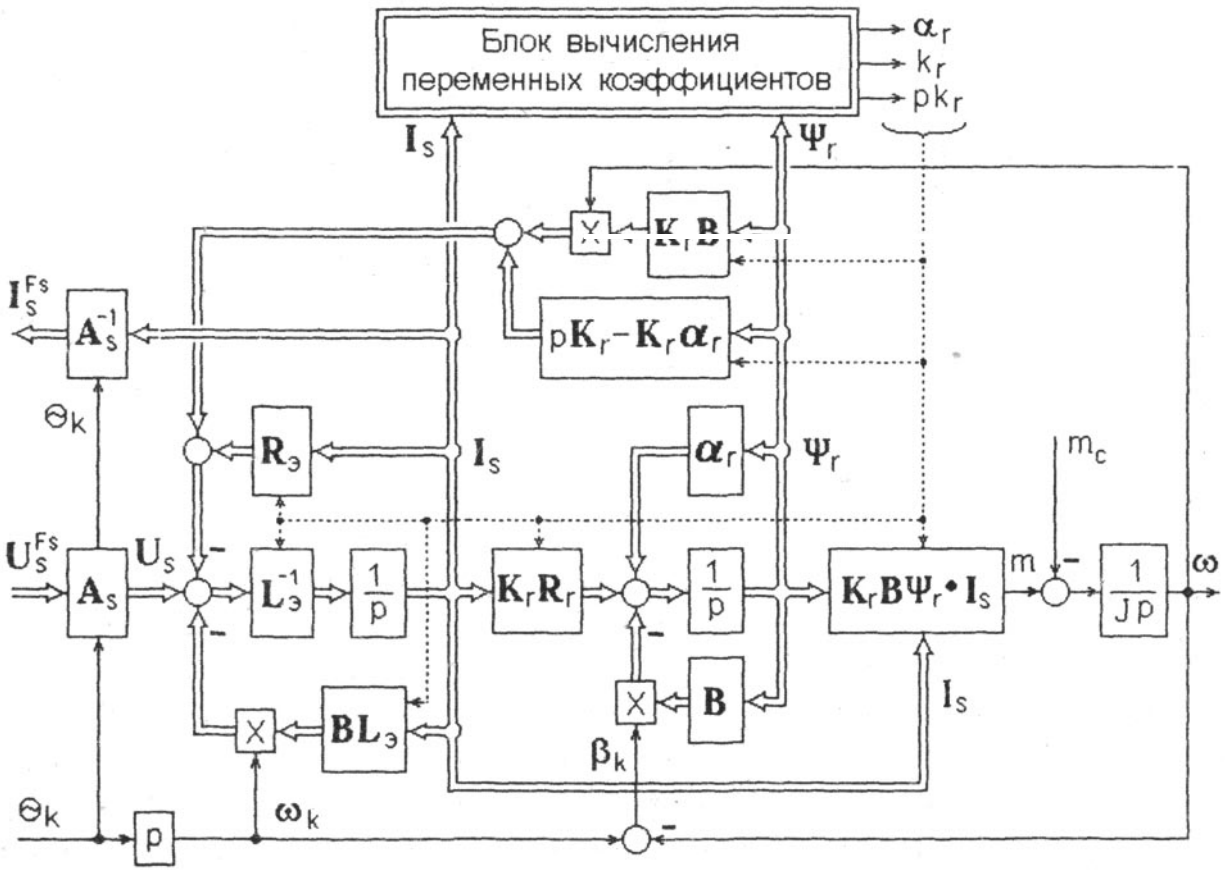

Рис. 6.6. Структурная схема модели насыщенной асинхронной машины в переменных $\mathbf{I_s} - \Psi_\mathbf{r}$

Структурная схема блока вычисления переменных коэффициентов показана на рис. 6.5. Соответствующие связи изображены на рис. 6.6 штриховыми линиями. В сравнении с ранее рассмотренным такой вариант модели более сложный, но в некоторых случаях он предпочтительнее.

Модель ненасыщенной асинхронной машины. При допущении $l_m = const$ структурная схема модели, изображенная на рис. 6.6, значительно упрощается и приобретает вид, показанный на рис. 6.7. В главной (прямой) цепи преобразования внешнего воздействия последовательно включены два линейных многомерных динамических звена, характеризующихся матричными передаточными функциями:

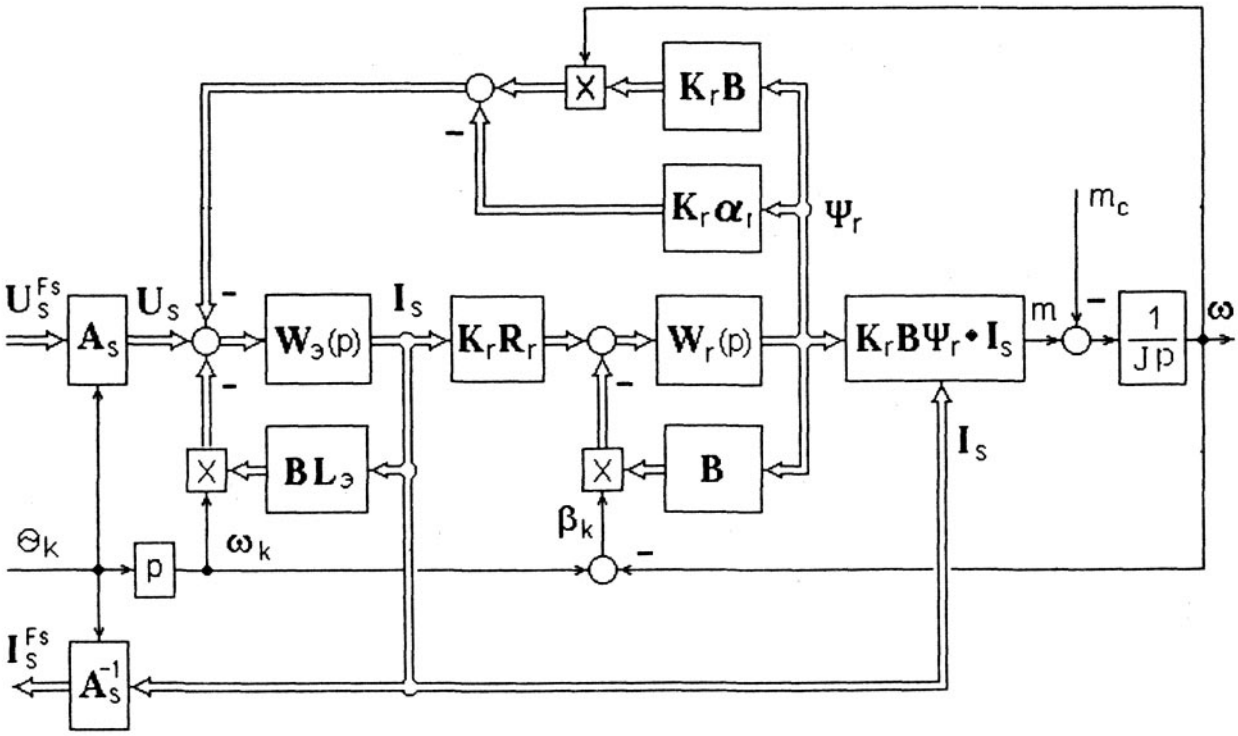

Рис. 6.7. Структурная схема модели ненасыщенной асинхронной машины в переменных $\mathbf{I_s} - \mathbf{\Psi_r}$

$$\mathbf{W_э}(p) = \left[\mathbf{R_э} \cdot (\mathbf{T_э}\, p + \mathbf{E})\right]^{-1}; \tag{6.53}$$

$$\mathbf{W_r}(p) = \mathbf{T_r} \cdot (\mathbf{T_r}\, p + \mathbf{E})^{-1}; \tag{6.54}$$

где $\mathbf{T_э} = diag\left[\mathbf{T_{эx}} \quad \mathbf{T_{эy}} \quad \mathbf{T_{эz}}\right]$; $\mathbf{T_r} = diag\left[\mathbf{T_{rx}} \quad \mathbf{T_{ry}} \quad \mathbf{T_{rz}}\right]$

– матрицы электромагнитных постоянных времени.

Элементы этих матриц определяются выражениями:

$$\mathbf{T_{эх}} = \mathbf{T_{эу}} = \frac{l_{s\sigma} + k_r \cdot l_{r\sigma}}{r_s + k_r^2 \cdot r_r}; \qquad \mathbf{T_{эz}} = \frac{l_{s\sigma}^0}{r_s}; \tag{6.55}$$

$$\mathbf{T_{rx}} = \mathbf{T_{ry}} = \frac{l_m + l_{r\sigma}}{r_r}; \qquad \mathbf{T_{rz}} = \frac{l_{r\sigma}^0}{r_r}. \tag{6.56}$$

Матрицы $\mathbf{T_э}$ и $\mathbf{T_r}$ являются диагональными, что свидетельствует об автономности каналов преобразования элементов векторов. Каждое из этих звеньев состоит из трёх одномерных линейных апериодических звеньев первого порядка. Полезно отметить, что постоянные времени $T_{эх,у}$ и $T_{rx,y}$ имеют такой же физический смысл и примерно те же величины, что и электромагнитные постоянные времени соответственно цепей якоря и возбуждения компенсированных машин постоянного тока [117]. Постоянные $T_{эя}$ и $T_{rя}$ характеризуют инерционность канала преобразования величин, связанных с нейтральными составляющими.

Каждое из выделенных многомерных звеньев охвачено отрицательной, в общем случае нелинейной обратной связью, глубина которой зависит от значений переменных ω_k и β_k. Данные связи являются перекрёстными по отношению к прямым каналам преобразования переменных с индексами *x* и *y*. Третий канал *z* по отношению к ним автономный и не охвачен данными связями.

Внешнее воздействие на входе звена $\mathbf{W_r}(p)$ с учётом выражения матрицы $\mathbf{K_r}$ характеризуется нулевым значением третьей компоненты. Поэтому звено $\mathbf{W_r}(p)$ можно рассматривать как двумерное, в отличие от трёхмерного в общем случае звена $\mathbf{W_э}(p)$.

В верхней части структурной схемы рис. 6.7 показаны элементы и связи, характеризующие вектор ЭДС, наведённых в обмотке статора полем ротора. Наиболее существенной её составляющей является ЭДС вращения, определяемая выражением

$$\mathbf{E}_\omega = \begin{bmatrix} e_{\omega x} \\ e_{\omega y} \\ e_{\omega z} \end{bmatrix} = \omega \cdot \mathbf{K_r} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Psi_r} = \begin{bmatrix} -\omega \cdot k_r \cdot \psi_{ry} \\ \omega \cdot k_r \cdot \psi_{rx} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.57}$$

Электромагнитный момент вычисляется как скалярное произведение векторов $\mathbf{K_r} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Psi_r}$ и $\mathbf{I_s}$, которое инвариантно к параметру преобразования θ_k.

На рис. 6.8 приведена развёрнутая по компонентам вектора структурная схема такой модели. Привлекает внимание её определённое сходство со структурной схемой машины постоянного тока. Данное сходство наиболее очевидно при *ориентации системы координат по вектору потокосцеплений ротора* [112]. Математически условие ориентации выражается следующим образом:

$$\psi_{ry} = p\psi_{ry} = 0; \qquad \psi_{rx} = \left\|\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{r}}\right\| = \psi_r; \tag{6.58}$$

Тогда второе матричное уравнение системы (2) в развёрнутом виде представляется как

$$r_r \cdot k_r \cdot i_{sx} = p\psi_r + \alpha_r \cdot \psi_r; \tag{6.59}$$

$$r_r \cdot k_r \cdot i_{sy} = \beta_k \cdot \psi_r. \tag{6.60}$$

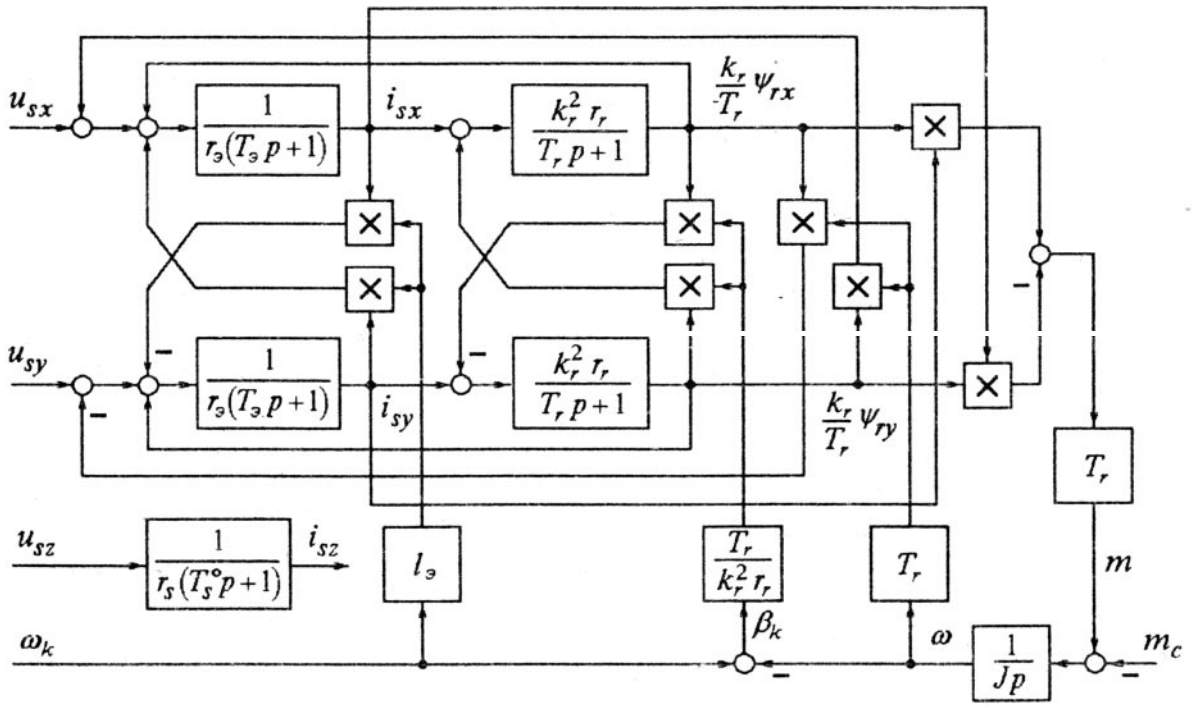

Рис. 6.8. Развёрнутая структурная схема модели ненасыщенной машины при произвольной ориентации системы координат

Отсюда следует, что скольжение системы координат и скорость её вращения

$$\beta_k = r_r \cdot k_r \cdot i_{sy} \cdot \psi_r^{-1}; \tag{6.61}$$

$$\omega_k = \omega + \beta_k \tag{6.62}$$

превращаются из независимых в зависимые переменные. Вектор ЭДС вращения приобретает вид:

$$\mathbf{E}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega \cdot k_r \cdot \psi_r & 0 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}. \tag{6.63}$$

Следовательно, обратная связь по ЭДС преобразуется из перекрёстной в связь одностороннего действия. Значительно упрощается формула электромагнитного момента:

$$m = k_r \cdot \psi_r \cdot i_{sy}. \tag{6.64}$$

Соответствующая структурная схема модели рис. 6.9 подтверждает отмеченное сходство. Очевидно, что компонента i_{sy} вектора токов статора $\mathbf{I_s}$ является эквивалентом тока якоря машины постоянного тока. Компонента i_{sx} в соответствии с уравнением (6.59) определяет норму вектора потокосцеплений ротора, которая с учётом коэффициента k_r служит эквивалентом потока возбуждения машины постоянного тока. Величина $e_{\omega y} = \omega \cdot k_r \cdot \psi_r$ соответствует величине ЭДС якоря машины постоянного тока.

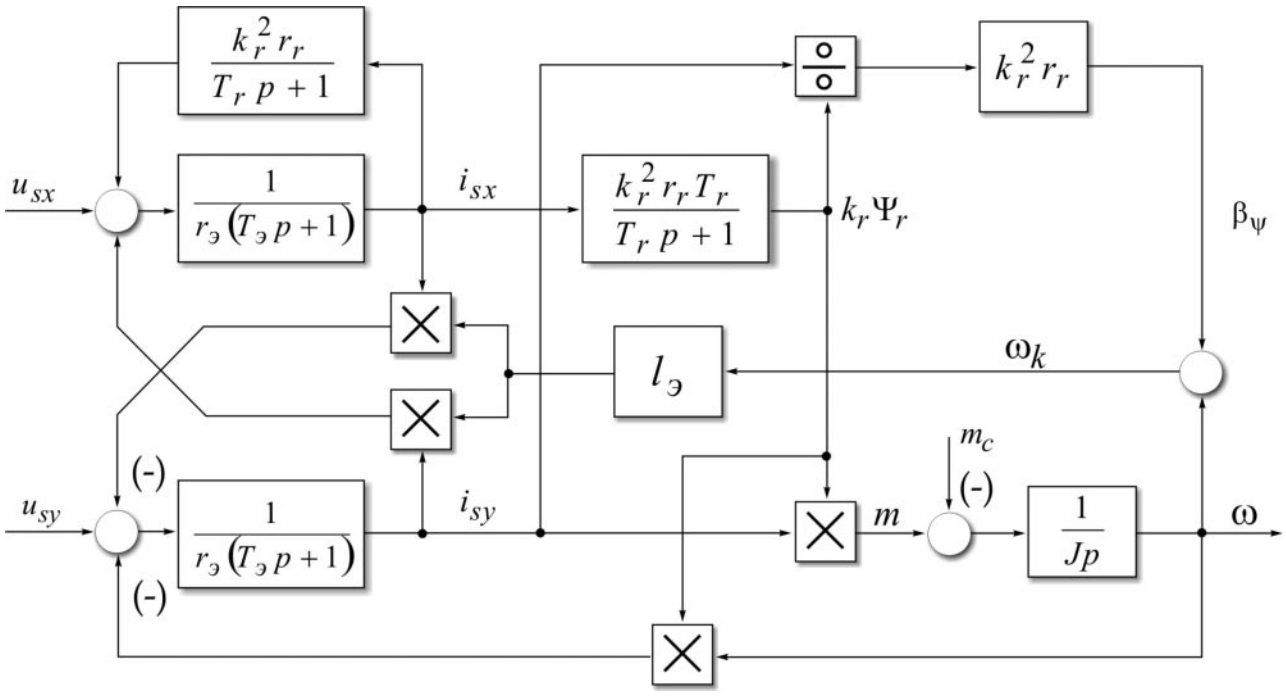

Рис. 6.9. Развёрнутая структурная схема модели ненасыщенной машины при ориентации системы координат по вектору потокосцеплений ротора

Рассмотренный вариант ориентации системы координат – это не только рациональный математический приём, значительно упрощающий структуру модели и исследование её режимов [112], но также эффективный технический принцип [153], используемый при построении высококачественных систем автоматического управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шрейнер Р. Т., Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты, Екатеринбург УРО РАН, 2000 г.
2.

АСИНХРОННЫЙ ЭЛЕКТРОПРИВОД

Составитель: ассистент Ланграф С. В.

Макет PDF: Ланграф С. В.